DEVOIR SURVEILLÉ N° II : Récurrence,Suites

TS3 Vendredi 27 septembre 2013

TS3 2014

Suites, récurrence...

Exercice 1

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$: $2^n \geq n^2$

Exercice 2

Étudier les variations des suites :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{n-2}$ pour $n \in \mathbb{N}-\{0;1;2\}$.
2. $v_n = 2^n - 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 Une suite récurrente

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x)=\frac{x}{3-x}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier (u_n) en utilisant deux méthodes.

Partie A

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. En déduire que si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$.
2. *a)* Le graphique ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents tous les traits de construction. partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$$

   c) Que peut-on affirmer sur la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie B

Soit (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n-2}$$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
2. En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 4

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

1. Exprimer w_2 et w_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. En déduire une conjecture d'une expression explicite de w_n en fonction de l'entier $n \geq 1$.
3. Prouver la conjecture.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^3 - n}{n+2}$

1. Étudier le sens de variation de (u_n).
2. Prouver que (u_n) est minorée par 0.
3. Vérifier que pour tout entier n on a $u_n = n^2 - 2n + 3 - \dfrac{6}{n+2}$.
   En déduire que (u_n) n'est pas pas majorée.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)
Annexe 1 (Exercice 3, question 2. a.)