Suites, récurrence...

Exercice 1 Récurrence

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

notons $\mathrm{P}(n)$ la propriété $\mathrm{S}_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

- Initialisation : $1^2=1$ et $\dfrac{1\times2\times3}{6}=\dfrac{6}{6}=1$ donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $p\geq 1$, on suppose que :

$$\mathrm{S}_p=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \text{ (HR)}$$

On doit prouver que :

$$\mathrm{S}_{p+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

En ajoutant $(p+1)^2$ de part et d'autre dans (HR), on obtient :

$$\mathrm{S}_{p+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2$$

$$=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2$$

En factorisant par $(p+1)$:

$$\mathrm{S}_{p+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2=(p+1)\left[\frac{p(2p+1)}{6}+(p+1)\right]$$

$$\mathrm{S}_{p+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2=\frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

En développant $(p+2)(2p+3)$ on obtient $2p^2+3p+4p+6=2p^2+7p+6$

$$\mathrm{S}_{p+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

- Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n\geq 1;\mathrm{S}_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrer que la propriété $3^n\geq(n+2)^2$ est vraie a partir du rang 3.Ainsi :
notons $\mathrm{R}(n)$ la propriété $3^n\geq(n+2)^2$:

- Initialisation :Au rang 3; on a $3^3=27$ et $(3+2)^2=5^2=25$; comme $27\geq 25$, $\mathrm{R}(3)$ est vraie.
- Hérédité :Soit $p\geq 3$, on suppose que : $3^p\geq(p+2)^2$
  On doit prouver que : $3^{p+1}\geq(p+3)^2$
  En multipliant par 3 de part et d'autre dans (HR), on obtient :
  $3\times3^p\geq 3(p+2)^2$ soit $3\times3^{p+1}\geq 3(p+2)^2$
  Il reste à voir que si $p\geq 3$ alors on a $3(p+2)^2\geq(p+3)^2$
  Or $3(p+2)^2\geq(p+3)^2 \Leftrightarrow 3(p^2+4p+4)\geq p^2+6p+9 \Leftrightarrow 2p^2+6p+3\geq 0$
  Comme ici p est un entier strictement positif, on a clairement $2p^2>0;6p>0;3>0$;
  Par somme on obtient $2p^2+6p+3>0\geq 0$
  Ainsi $3(p+2)^2\geq(p+3)^2$
  Comme $3^{p+1}\geq(p+3)^2$ et $3(p+2)^2\geq(p+3)^2$ on déduit $3^{p+1}\geq(p+3)^2$
- Conclusion :Le principe de récurrence s'appliquant, on a :
  pour tout $n\geq 3$; $3^n\geq(n+2)^2$

Exercice 2

Etudier les variations des suites :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{n-2}$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0;1;2\}$.
Méthode : On forme $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n-1} - \dfrac{n^2}{n-2} = \dfrac{(n+1)^2(n-1) - n^2(n-1)}{(n-1)(n-2)} = \dfrac{(n^2+2n+1)(n-2) - (n^3-n^2)}{(n-1)(n-2)}$
Ainsi $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^3+2n^2+n-2n^2-4n-2-n^3+n^2}{(n-1)(n-2)} = \dfrac{n^2-3n-2}{(n-1)(n-2)}$
Comme ici $n \geq 3$ on a $n-1 \geq 2$ et $n-2 \geq 1$ ainsi par produit $(n-1)(n-2) > 0$
et donc $u_{n+1} - u_n$ a le signe du trinôme $n^2 - 3n - 2$.
$\Delta = 17$; le trinôme a deux racines $n_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $n_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

n	$-\infty$		n_2		n_1		$+\infty$
n^2-3n-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme $n_1 \approx 3.56$; si $n \geq 4$ alors $n^2 - 3n - 2 > 0$
La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante à partir du rang 4.

2. $v_n = 2^n - 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} - v_n = 2^{n+1} - 2(n+1) - (2^n - 2n) = 2 \times 2^n - 2n - 2 - 2^n - 2n = 2^n - 2$
Or la suite de terme général 2^n est strictement croissante,
donc si $n \geq 1$ alors $2^n \geq 2^1$, soit $2^n - 2 \geq 0$;
ainsi pour tout entier $n \geq 1$ on a $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
Par ailleurs $v_0 = 2^0 - 0 = 1$ et $v_1 = 2^1 - 2 = 0$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.

Exercice 3 Une suite récurrente

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3-x}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier (u_n) en utilisant deux méthodes.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. En déduire que si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$.
3 est la seule valeur interdite de f ; ainsi f est bien définie et dérivable sur $[0;2]$.
$f = \dfrac{u}{v}$, donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$f'(x) = \dfrac{1(3-x)-(-1)x}{(3-x)^2} = \dfrac{3}{(3-x)^2}$
Comme 6>0 et $(3-x)^2 > 0$ sur $[0;2]$, on a ainsi $f'(x) > 0$ sur $[0;2]$;
La fonction f est strictement croissante sur *l'intervalle* $[0;2]$
Ainsi si $0x \leq 2$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$
$f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{3}{6-2} = \dfrac{3}{4}$
si $0x \leq 2$ alors $0 \leq f(x) \leq \dfrac{3}{4} \leq 2$
si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$.

2. *a*) partir de ce graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) semble décroissante minorée par 0. Elle semble converger vers 0, abscisse d'un des points d'intersection de C_f et de la droite $\Delta : y = x$.
b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$$

On note Q(n) : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$

✎ Initialisation : $u_1 = \dfrac{3}{6-1{,}5} = \dfrac{3}{4.5} = \dfrac{2\times 1{,}5}{2\times 1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

On a $0 \leq \dfrac{2}{3} \leq 1{,}5 \leq 2$

ainsi $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$, et Q(0) est vraie.

✎ Hérédité : soit $k \geq 0$ fixé, on suppose que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 2$

D'après la question 1. on peut affirmer $0 \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant 2$

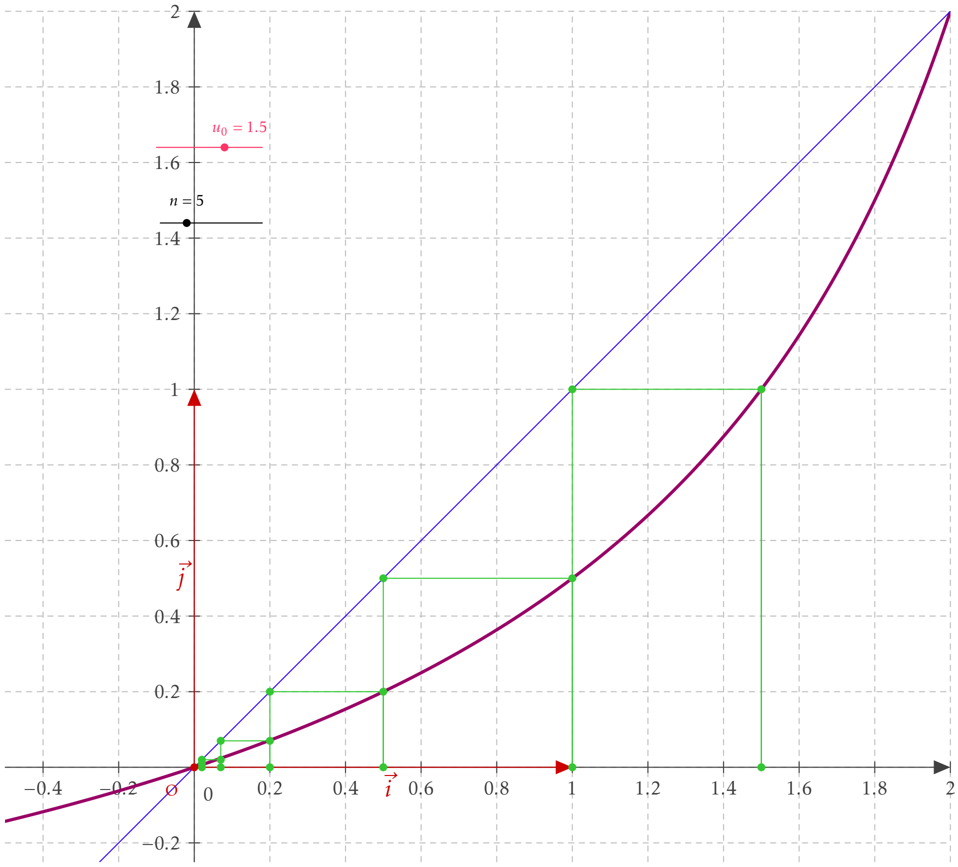
soit $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$

✎ Conclusion :

– Q(0) est vraie,

– Pour $k \geq 0$; Q(k) vraie entraîne Q($k+1$) vraie.

Le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n; $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$



Partie B

Soit (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2} = \frac{\dfrac{u_n}{3-u_n}}{\dfrac{u_n}{3-u_n}-2} = \frac{\dfrac{u_n}{3-u_n}}{\dfrac{u_n-6+2u_n}{3-u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n} \times \frac{3-u_n}{3u_n-6} = \frac{u_n(3-u_n)}{(3-u_n)\times 3(u_n-2)} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n-2} = \frac{1}{3}v_n$$

La $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n .

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique on a, d'après le cours $v_n = q^n \times v_0$.

Or $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0-2} = \dfrac{1{,}5}{-0{,}5} = -3$

Pour tout entier n on a $v_n = -3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

puis l'expression de u_n en fonction de n.
Ayant $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$ on a $v_n(u_n - 2) = u_n$ soit $v_n u_n - 2v_n = u_n$
soit $u_n v_n - u_n = 2v_n$, soit en factorisant par u_n :
$u_n(v_n - 1) = 2v_n$, d'où $u_n = \dfrac{2v_n}{v_n - 1}$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \quad ; u_n = \frac{2v_n}{v_n - 1} = \frac{-6\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}.}$$

Exercice 4

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

1. Exprimer w_2 et w_3 sous forme de fractions irréductibles.
   $n = 1$ dans la relation $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ donne :$w_2 = w_1 + \dfrac{1}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
   $n = 2$ dans la relation $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ donne :$w_3 = w_2 + \dfrac{1}{(2+1)(2+2)} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$
   $$\boxed{w_2 = \frac{2}{3} \text{ et } w_3 = \frac{3}{4}.}$$
2. En déduire une conjecture d'une expression explicite de w_n en fonction de l'entier $n \geq 1$.
   On remarque :
   - $w_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$
   - $w_2 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{2+1}$
   - $w_3 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{3+1}$

   On conjecture :
   $$\boxed{\text{Pour } n \geq 1 ; w_n = \frac{n}{n+1}}$$
3. Prouver la conjecture.
   On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$
   - Initialisation : $w_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $k \geq 1$; on suppose que $w_k = \dfrac{k}{k+1}$ (HR), on doit prouver que $w_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$
     Or $w_{k+1} = w_k + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ d'après (HR)
     Ainsi $w_{k+1} == \dfrac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$, ici $k \neq -1$ car $k \geq 1$.
   - Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 1 ; w_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n+2}$

1. Étudier le sens de variation de (u_n)
   On forme $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe ;
   déjà $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1}{(n+1)+2} = \dfrac{2n^2 + 7n + 4}{n+3}$.
   Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n^2 + 7n + 4}{n+3} - \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n+2} = \dfrac{(n+2)(2n^2 + 7n + 4)}{(n+2)(n+3)} - \dfrac{(2n^2 + 3n - 1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 + 10n + 11}{(n+2)(n+3)}$$
   On a comme $n \in \mathbb{N} ; n \geq 0$, donc $n + 2 \geq 2 > 0$ et $n + 3 \geq 3 > 0$; par produit $(n+2)(n+3) > 0$.
   De la même façon on a comme $n \geq 0 ; 2n^2 + 10n + 11 > 0$
   Ayant pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$,

on a montré que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Prouver que (u_n) est minorée par $-\dfrac{1}{2}$

   La suite (u_n) étant strictement croissante, on a si $n \geq 0$ alors $u_n \geq u_0$. Comme $u_0 = -\dfrac{1}{2}$.

   Pour tout entier $n; u_n \geq -\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi(u_n) est minorée par $-\dfrac{1}{2}$.

3. Vérifier que pour tout entier n on a $u_n = 2n - 1 + \dfrac{1}{n+2}$.
   En déduire que (u_n) n'est pas pas majorée.
   En réduisant au même dénominateur, il vient :
   $2n-1+\dfrac{1}{n+2} = \dfrac{(2n-1)(n+2)+1}{n+2} = \dfrac{2n^2+4n-n-2+1}{n+2} = \dfrac{2n^2+3n-1}{n+2} = u_n$

   $$u_n = 2n - 1 + \frac{1}{n+2}$$

   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$; par somme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   La suite (u_n) divergeant vers $+\infty$; elle n'est pas majorée.