DEVOIR SURVEILLÉ N° X : Fonction ln

TSTI2D lundi 28 janvier (14h30)

TSTI2D

Exercice X 1

1. Ecrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: $A = \ln 18?\ln 8$ $B = 3\ln 24 + \ln\left(\frac{1}{27}\right)$
2. Démontrer que $\ln 8 + \ln\left(e^2\right) + 2\ln\left(4\sqrt{e}\right) = 7\ln 2 + 3$
3. Dériver la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 4\right)$
4. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

Exercice X 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\ln x = \ln 3 + \ln(2x+3)$$

Exercice X 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln x - x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. a) Déterminer la limite de f en 0.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b) Montrer que $f(x) = x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$).

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. a) Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.

b) Déterminer la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$ et de $f(\mathrm{e}^2)$ en fonction de e.

c) Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = -x - 2$.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : (On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.)

x	0,5	1	2	3	4	5	7	11	17
$f(x)$									

5. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

6. Dans le même repère, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 2$.
Comment peut-on graphiquement retrouver le résultat de la question **3. c.** ?

7. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = 4x\ln x - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

a) Démontrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte en fonction de $\ln 2$.