Exercice 1 (4 *points*)

UN QCM

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
On demande de recopier sur la copie chaque proposition complétée par la réponse choisie.Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

On considère une fonction f définie sur et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	0

1. On peut affirmer que ...
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. La courbe représentative de la fonction f admet ...
- pour asymptotes les droites d'équation $y = -1$ et $y = 3$.
- pour asymptotes les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.
- la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.
- la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.

3. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet ...
- 0 solution.
- 1 solution.
- 2 solutions.
- 3 solutions.

4. Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$ ...
- n'a pas de solution.
- a pour solutions l'ensemble des réels $x > 2$.
- a toutes ses solutions positives.
- a toutes ses solutions négatives.

Exercice 2 (4 points)

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

On sait que :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
- la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;0)$;
- la courbe (C) admet pour asymptote l'axe des abscisses.

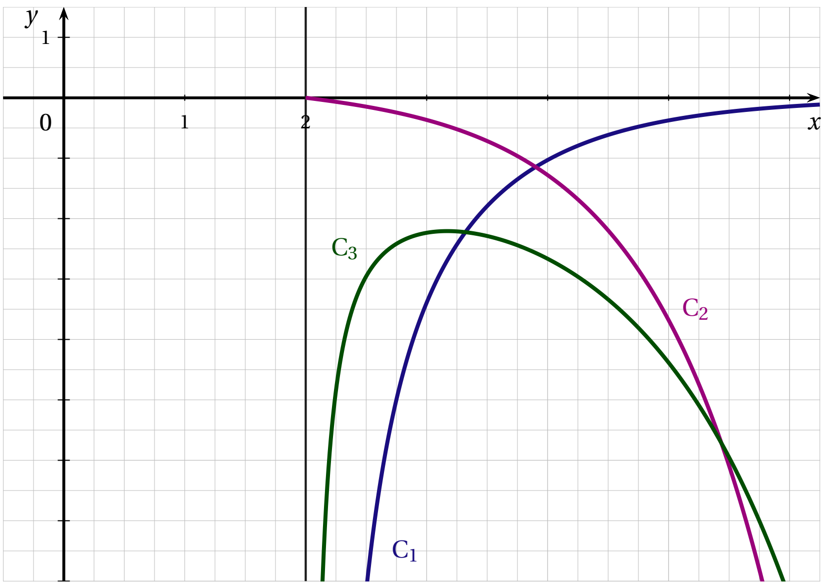
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe (C) ?

3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Laquelle de ces trois courbes est la courbe représentative de la fonction g ?



Exercice 3 3 (12 *points*)

1. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x + \dfrac{1}{4-2x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan d'unité le cm.

a) Montrer que $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 5}{4-2x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.

d) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième asymptote d'équation $y = 1 - 2x$.

2. Calculer la dérivée de la fonction f ; on montrera que $f'(x) = \dfrac{-8x^2 + 32x - 30}{(4-2x)^2}$

3. Etudier les variations de f

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

5. Tracer T, $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 4 4 (6,5 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On note f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Donner le tableau des variations de f. (*Faire figurer les limites obtenues, ainsi que les valeurs des extremums de* f)

3. Montrer que l'équation $f(x) = 7$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4;-3]$.
Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au dixième près.

Exercice 5 (Bonus ! 2 *points*)

Signe d'un polynôme du troisième degré Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 54$

1. Vérifier que $P(3) = 0$.

2. En déduire une factorisation de $P(x)$

3. En déduire le signe du polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 54$.