**Lycée l'Oiselet** **Lundi 24 février 2014**

# BACCALAURÉAT BLANC

# DE MATHÉMATIQUES

# – SÉRIE STI2D –

**Durée de l'épreuve : 4 HEURES**
**Les calculatrices sont AUTORISÉES**

**Coefficient : 4**



*Le candidat doit traiter les quatre exercices. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.*

*Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :*
- *le nom de l'épreuve : épreuve de Mathématiques.*
- ***votre spécialité** : ITEC ou EE.*
- *votre classe : Terminale ITEC1 ou Terminale ITEC2 ou TEE*

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/5 à 5/5**

## *Une fonction* ln *pour commencer ...*

**Exercice 1 6,25 points**

**PARTIE A**

$f$ est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.


$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f$ dans un repère orthonormal.
T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(1;-1)$. T passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

1. *a)* Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
   *b)* Déterminer $f'(1)$.
   *c)* Donner une équation de T.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.
   *a)* Calculer $f'(x)$.
   *b)* Déterminer alors les valeurs de $a$ et $b$.

**PARTIE B**

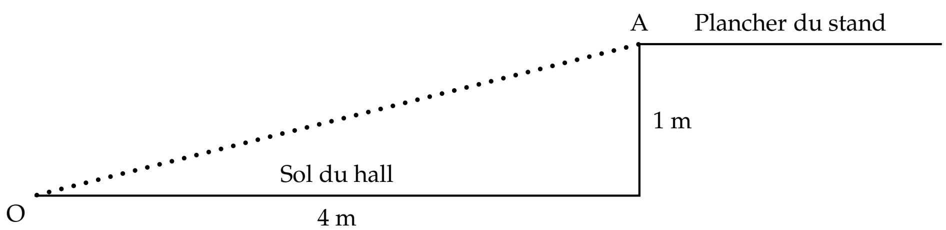
Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. *a)* Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   *b)* On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. *a)* Pour tout nombre réel $x$ appartenant à $]0;+\infty[$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.
   *b)* Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Établir le tableau de variations de $f$ sur $]0;+\infty[$.
4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour $x$ appartenant à $]0;+\infty[$.
5. *a)* Donner le signe de $f(x)$ pour $x$ appartenant à $[1;3]$.
   *b)* Montrer que la fonction F définie pour $x$ appartenant à $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = (2x+4)\ln x - 7x$ est une primitive de $f$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ en unités d'aires.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $\mathcal{A}$.

## *Un calcul d'aire ...*

**Exercice 2 5.75 pts**

Pour la construction d'un stand d'exposition, des élèves de TSTI2D ont besoin de créer une rampe d'accès reliant le plancher du stand au sol du hall d'exposition. Une rampe plane ne pouvant permettre l'accès aux fauteuils roulants, les élèves de BTS proposent comme solution de remplacer sur la coupe ci-dessous, le segment [OA] par la courbe $\mathcal{C}$ qui fait l'objet du problème suivant.




On choisit le repère orthonormé dans lequel le point A a pour coordonnées (4 ; 1) et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie que l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{1}{32}\left(-x^3 + 6x^2\right).$$

1. Vérifier que O et A sont bien sur la courbe $\mathcal{C}$.
2. *a*) Calculer la fonction dérivée $f'$ de $f$. Montrer que $f'(x) = \frac{-3}{32}x(x-4)$.

   *b*) étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 4]. Donner ensuite le tableau de variations de $f$ sur [0 ; 4].
3. *a*) Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

   *b*) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse 2 ?
4. *a*) Recopier et compléter le tableau suivant : (on arrondira les valeurs au centième).

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | 0,96 | |

   *b*) On prendra comme unité graphique 5 cm. Représenter sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux trois points d'abscisses 0, 2 et 4.
5. *a*) Déterminer une primitive F de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 4].

   *b*) On note $\mathcal{S}$ la partie située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$.
   Calculer l'aire de $\mathcal{S}$ (en unités d'aires).

   *c*) On précise qu'une unité d'aire sur le graphique correspond à 1 m$^2$ en réalité. Sachant que le stand a une largeur de 4 m, quel volume de béton devra-t-on utiliser pour construire la rampe d'accès ? La formule donnant ce volume est $V = B \times h$ où V est le volume, B l'aire de la partie correspondant à la partie $\mathcal{S}$ du graphique et $h$ la largeur du stand.

## *Les suites ...*

**Exercice 3 3,5 points**

La désintégration du Thorium, corps radioactif, donne du Radium.
On désigne par $U_0$ le nombre d'atomes dans un échantillon de Thorium à l'instant $t = 0$, par $U_1$ le nombre d'atomes de Thorium un jour après, et, pour tout entier naturel $n$, par $U_n$ le nombre d'atomes de Thorium jours après.
On sait que le nombre d'atomes de Thorium diminue de par 3,7% jour.

1. Exprimer $U_1$ en fonction de $U_0$, puis de façon générale $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(U_n)$ ? Justifier.
3. Un échantillon contient $10^{20}$ atomes à l'instant $t = 0$ .

   *a*) Justifier que $U_n = 10^{20} \times 0{,}963^n$

   *b*) Déterminer le nombre d'atomes de cet échantillon au bout de 2 ans.

4. On désire connaître la demi-vie du Thorium, c'est-à-dire le nombre de jours au bout desquels le nombre d'atomes sera égal à la moitié de sa valeur initiale.
   *a*) Justifier que cela revient à résoudre l'équation $0{,}963^n = 0{,}5$
   *b*) Résoudre cette équation par le calcul et en déduire la demi-vie du Thorium à 1 jour près.
5. Enzo qui n'est pas très fort en calcul mais plus doué en programmation, préfère utiliser un algorithme pour déterminer la demi-vie du Thorium. Il a commencé à l'écrire mais réfléchit encore à certaines instructions. Aidez-le en complétant les pointillés pour que l'algorithme lui donne la valeur de la demi-vie du Thorium.

```
Variables
    U : un nombre réel
    k : un nombre entier naturel
Initialisation
    Affecter à k la valeur 0
    Affecter à U la valeur 10^20
Traitement
    Tant que ...........
        Affecter à k la valeur k + 1
        Affecter à U la valeur ...........
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher La demi-vie du Thorium est de
    Afficher ......
    Afficher jours
```

## *Les nombres complexes*

### Exercice 4 4,5 points

On considère les nombres complexes

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_B = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_C = -2+2i.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.
*Les parties I et II sont indépendantes*

**Partie I : Q. C. M.**
Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
**On ne demande aucune justification**
**NOTATION :** *chaque réponse juste rapporte* 0,75 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point.*
*Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Si le total des points est négatif, il est ramené à* 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A z_B$ est :

   **Réponse A :** un nombre réel positif
   **Réponse B :** un nombre réel négatif
   **Réponse C :** un nombre imaginaire pur
   **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :

   **Réponse A :** un nombre réel positif
   **Réponse B :** un nombre réel négatif
   **Réponse C :** un nombre imaginaire pur
   **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de $z_A$ est :

   **Réponse A :** $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$
   **Réponse B :** $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$
   **Réponse C :** $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   **Réponse D :** $\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe $z_C$ peut se mettre sous la forme :

   **Réponse A :** $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
   **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   **Réponse C :** $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
   **Réponse D :** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**Partie II**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}}$, $z_{\text{B}}$ et $z_{\text{C}}$.

1. Soit M un point du plan d'affixe $z$.
   *a*) Interpréter géométriquement $|z - z_{\text{A}}|$.
   *b*) Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité : $|z - z_{\text{A}}| = |z - z_{\text{B}}|$.
   *c*) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.