DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° I : Récurrence,Suites

TS4 A rendre le lundi 17 septembre (10h10)

TS4 2013

Exercice I 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a) Sur un graphique représenter les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;\,0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

c) [a] En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Exercice I 2

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$: $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. a) Soit n un entier naturel et m un entier relatif. Montrer que :
Si $4^n + m$ est un multiple de 3, alors $4^{n+1} + m$ est aussi un multiple de 3.

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$: $4^n - 1$ est un multiple de 3.

c) En déduire que pour tout $n \geq 0$: $4^n + 1$ n'est pas un multiple de 3.

---

a. Vous ne pouvez pas traiter cette question, vu l'avancement du cours ...