- ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
- Durée de l'épreuve : 4 heures
- La calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants qui doivent être tous traités. Un résultat précédemment donné dans le texte, pourra être admis pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera évaluée favorablement. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice X1 Arithmétique ♠ 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier m compris entre 0 et 25 de la façon suivante :
- on calcule $11m + 8$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11m + 8$ par 26, que l'on appelle n.

m est alors « codé » par n.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25(\text{modulo}26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26 ; au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.
On admet que lorsque m prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 25, n prend également toutes ces valeurs.

1. Coder le mot BAC.

2. Soit m un entier naturel compris entre 0 et 25 ; m est « codé » par n (on rappelle que $11m + 8 \equiv n(mod.26)$).
La question 3 de la partie A permet d'établir que $11 \times 19 \equiv 1(mod.26)$.

a) Montrer que $19n + 4 \equiv m(mod.26)$.

b) En déduire que m est le reste de la division euclidienne de $19n + 4$ par 26.

c) Décrire un procédé permettant de « décoder » tout entier naturel n compris entre 0 et 25.

d) Décoder le mot GO.

Exercice X2 Fonction exponentielle ♣ 5,5 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

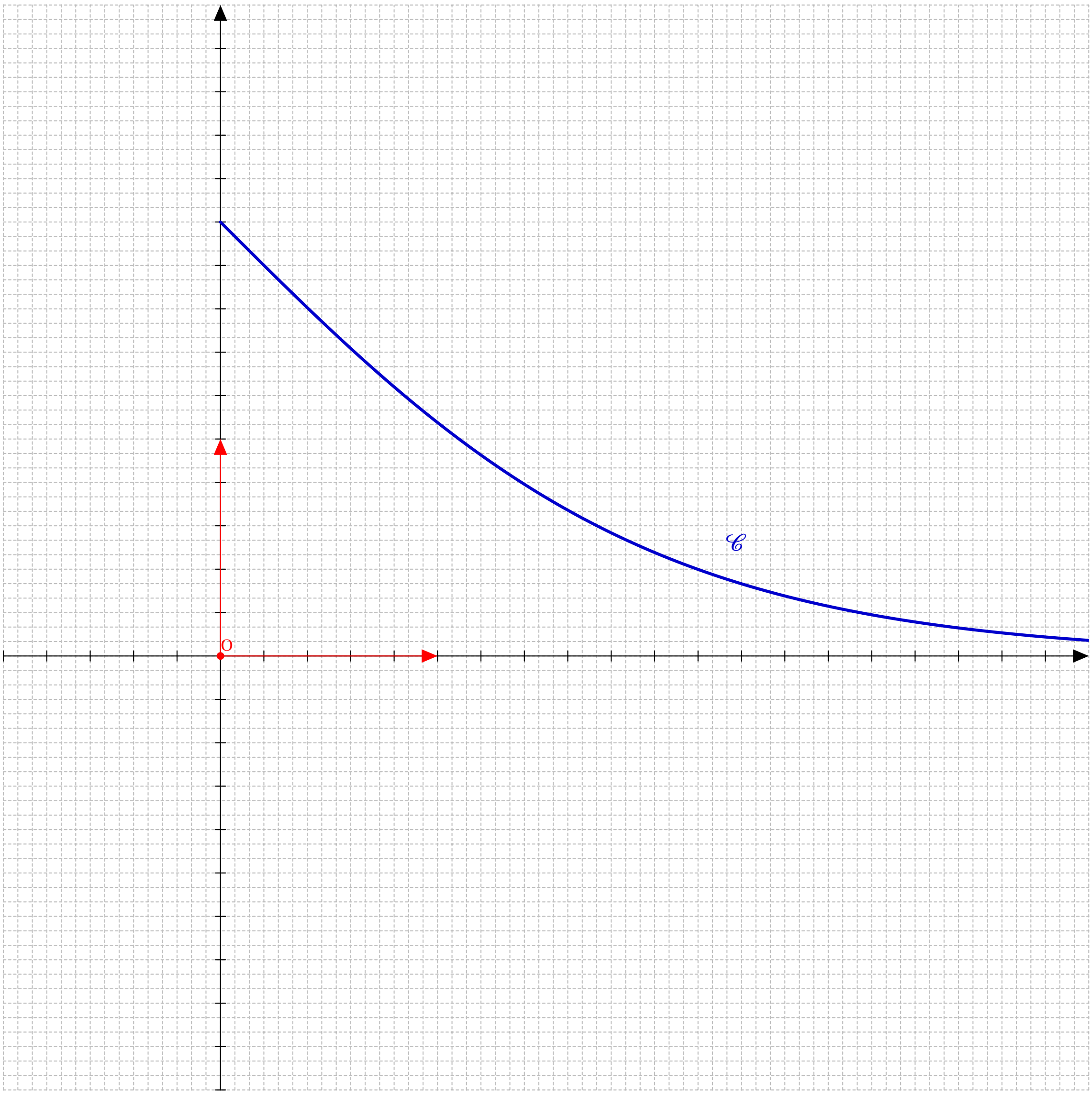
1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α.
La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 1



Exercice X3 Probabilités ♡ 5 points

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie). Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(\mathrm{X}) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

Exercice X4 Suites ♢ 4,5 points

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = g\left(u_n\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.
   On a représenté en **annexe (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.
   a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
   On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
   Aucune justification n'est demandée.
      - Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
      - Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
      - Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

   c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive et que ℓ est comprise entre u_n et u_{n+1}, pour tout $n > 0$.
      i. Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$.
      ii. Montrer que $\ell = \alpha$.

iii. Voici un algorithme :

Variables : p et n sont des entiers naturels.
u est un réel.
Entrées : Entrée : Saisir p (p entier naturel)
Initialisation(s)
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 1,5

début
    Tant que $|g(u) - u| > 10^{-p}$ faire
    n prend la valeur $n + 1$.
    u prend la valeur $g(u)$
    Fin de Tant que
fin
retourner n.

Faire fonctionner cet algorithme avec $p = 1$ en exécutant toutes les instructions et en écrivant les résultats les uns sous les autres.

Que peut-on dire de l'amplitude de l'encadrement de α que permet d'obtenir la valeur de n affichée par cet algorithme ?

ANNEXE de l'exercice 4 : à rendre avec la copie

NOM,CLASSE : ....