DEVOIR EN TEMPS LIBRE N ° III : Fonctions,Suites

TS3 A rendre le lundi 4 novembre 2013(10h10)

TS3 2014

Exercice 1 Étude d'une fraction rationnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$$

2. Conjecturer une racine de x^3+3x-4 et valider la conjecture. Factoriser cette expression pour $x \in \mathbb{R}$. (théorèmes de factorisation et d'identification)
3. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.
4. Déterminer a,b,c,d réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

5. Étudier le signe de $f(x) - x + 2$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
8. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe, au point d'abscisse -1.
9. Représenter soigneusement $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes, les tangentes horizontales de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ elle même.
10. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 2 Méthode de Héron

L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples (divisions, sommes, produits).

Soit $a \in [1;+\infty[$ et f la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} + x\right)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [\sqrt{a};a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.
   En déduire : pour $x \in [\sqrt{a};a]$, $f(x) \in [\sqrt{a};a]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a};a]$. (on a ainsi prouvé que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie)
4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.
5. Démontrer que ℓ vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\ell} + \ell\right)$. En déduire ℓ.
6. Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction. À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2}$?
7. dans cette question on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n).
   On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$.
   On suppose que u_0 approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leq v_0 \leq 0{,}5$.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leq v_n^2$.
   b) Par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n < \dfrac{1}{2^{2^n}}$
   c) En déduire $v_4 < 10^{-4}$. À partir de quel rang n peut-on dire la suite (u_n) approche $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?