DM 1 TS3

DM 1 TS3

Exercice 1 Une équation

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^3 + 2x - 1 = (x^2 + x - 1)(1 - x)$, puis résoudre $-x^3 + 2x - 1 = 0$.

Exercice 2 Une inégalité

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour $x \in [-10;10]$.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations complet de f.
3. En déduire le tableau de signes de $f(x)$. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 Position relative de deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soient

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x^2 \quad ; \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ les courbes respectives de g et h dans le repère précédent.

1. Factoriser $g(x) - h(x)$ puis dresser le tableau de signes de cette expression.
2. Donner l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. Décrire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 4 Récurrence ...

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 3^{n+6} - 3^n \text{ est divisible par } 7.$$