Lycée l'Oiselet **Lundi 24 février 2014**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter les quatre exercices. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : Mathématiques, Sciences Physiques ou SVT.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

Suites

Exercice 1 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2,u_3 et u_4.
2. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel non nul.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
5. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :
    n est un nombre entier naturel
    u est un nombre réel
Initialisations :
    Affecter à n la valeur 1
    Affecter à u la valeur 0,5
Traitement :
    Tant que n < 10
        Affecter à u la valeur (n+1)/(2n) × u
        Affecter à n la valeur n+1
    Fin Tant que
Sortie :
    Afficher u
```

   a) Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?
   b) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $0 < u_n < 10^{-2}$.

Probabilités

Exercice 2 5 points

Commun à tous les candidats

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.
3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx$
   a) Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.
   b) La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.
   On pourra résoudre d'abord l'équation $u - u^2 = \frac{1}{4}$.

Fonction exponentielle

Exercice 3 5 points

Commun à tous les candidats
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont fournies en annexe.

Partie A

Sur la figure de l'annexe est tracée une tangente T commune à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
Il semble que ces courbes admettent une autre tangente commune T′. Tracer au mieux la droite T′.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. *a)* Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
   b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
   c) En déduire que $b = -a$.
2. En déduire que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. *a)* Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. *a)* Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b) On note α la solution positive de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution négative de cette équation. A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de l'une de ces tangentes communes, existence que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel positif défini dans la partie C).

1. Démontrer que le coefficient directeur de la droite (EF) est e^{α} (on utilisera le fait que $\varphi(\alpha) = 0$).
2. Démontrer que la droite (EF) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Calcul intégral

Exercice 4 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La courbe $(\mathcal{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
La courbe $(\mathcal{C})$ passe par les points O et $A\left(1\,;\,\frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2e}$.
2. Tracer le segment [OA] puis montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   a) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
   b) Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. *a)* Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} \times g(x)$.
   b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

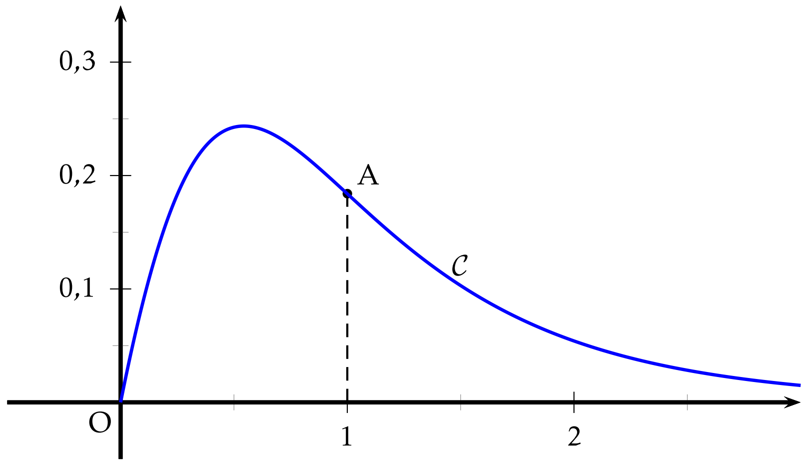
$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.
   c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

Nom , Prénom et Classe : **A rendre avec la copie**

Exercice 4



Exercice 3