# DEVOIR SURVEILLÉ N° X : Fonction ln

TSTI2D lundi 28 janvier (14h30)

## Exercice X 1

**1.** Ecrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ :

$A = \ln 18 + \ln 8 = \ln\left(2\times 3^2\right) + \ln(2^3 = \ln 2 + 2\ln 3 + 3\ln 2$

$$\boxed{A = \ln 18 + \ln 8 = 4\ln 2 + \ln 3}$$

$B = 3\ln 24 + \ln\left(\dfrac{1}{27}\right) = 3\ln\left(3\times 2^3\right) - \ln\left(3^3\right) = 3\left(\ln 3 + 3\ln 2\right) - 3\ln 3$

$$\boxed{B = 9\ln 2}$$

**2.** Démontrer que $\ln 8 + \ln\left(e^2\right) + 2\ln\left(4\sqrt{e}\right) = 7\ln 2 + 3$

$\ln 8 + \ln\left(e^2\right) + 2\ln\left(4\sqrt{e}\right) = \ln\left(2^3\right) + 2\ln e + 2\left(\ln 4 + \ln\left(\sqrt{e}\right)\right) = 3\ln 2 + 2 + 2\left(2\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln(e)\right) = 3\ln 2 + 2 + 4\ln 2 + 1 = 7\ln 2 + 3$

**3.** Dériver la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 4\right)$

$f = \ln u$ donc $f' = \dfrac{u'}{u}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4}}$$

**4.** Déterminer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

On pose $u(x) = 2x+1$, alors $u'(x) = 2$

$f = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$

F une primitive de $f$ :

$F = \dfrac{1}{2}\times \ln|u| + C$

$$\boxed{\text{Une primitive de } f \text{ est définie par } F(x) = \frac{1}{2}\times\ln|2x+1| + C.}$$

## Exercice X 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\ln x = \ln 3 + \ln(2x+3)$$

L'équation a un sens si et seulement si $x > 0$ et $2x+3 > 0$ soit $x > 0$ et $x > -\dfrac{3}{2}$.

$\mathcal{D} = ]0; +\infty[$.

Sur $\mathcal{D}$ ; on a $2\ln x = \ln 3 + \ln(2x+3) \iff \ln x^2 = \ln[3(2x+3)] \iff x^2 = [3(2x+3)]$

soit à résoudre $x^2 - 6x - 9 = 0$.

$\Delta = 36 - 4(-9) = 72 = (6\sqrt{2})^2$.

L'équation a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+6\sqrt{2}}{3} = 3+3\sqrt{2} \approx 7.2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-6\sqrt{2}}{2} = 3-3\sqrt{2} \approx -1.2$$

$$\boxed{\text{Seul } x_1 \in \mathcal{D} \text{ et donc } \mathcal{S} = \{3+3\sqrt{2}\}}$$

## Exercice X 3

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln x - x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

**1.** a) Déterminer la limite de $f$ en 0.

D'après une limite du cours : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 4\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x+2 = 2\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

Ayant $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, on déduit que la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) Montrer que $f(x) = x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$ pour tout $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On développe : $x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right) = 4\dfrac{\ln x}{x}\times x - x + \dfrac{2}{x}\times x = 4\ln x - x + 2 = f(x)$ En déduire la limite de $f$ en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4\dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{2}{x} = 1\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x} = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

**2.** On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$.

On part de $f(x) = 4\ln x - x + 2$

$f'(x) = 4\times\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{4}{x} - 1 = \dfrac{4-x}{x}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{4-x}{x}}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ et établir le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On travaille sur $]0;+\infty[$, donc $f'(x)$ a le signe de $4-x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-x = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4-x > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $8\ln 2 - 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**3.** a) Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.

- $f(2) = 4\ln 2 - 2 + 2 = 4\ln 2$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} + 2 = -4\ln 2 + \dfrac{3}{2}$

b) Déterminer la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$ et de $f(\mathrm{e}^2)$ en fonction de e.

- $f(\mathrm{e}) = 4\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 = 4 - \mathrm{e} + 2 = 6 - \mathrm{e}$
- $f(\mathrm{e}^2) = 4\ln\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 + 2 = 4\times 2\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 = 10 - \mathrm{e}^2$

c) Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = -x-2$.

$f(x) = -x-2 \Leftrightarrow 4\ln x - x + 2 = -x - 2 \Leftrightarrow 4\ln x = -4 \Leftrightarrow = -1$

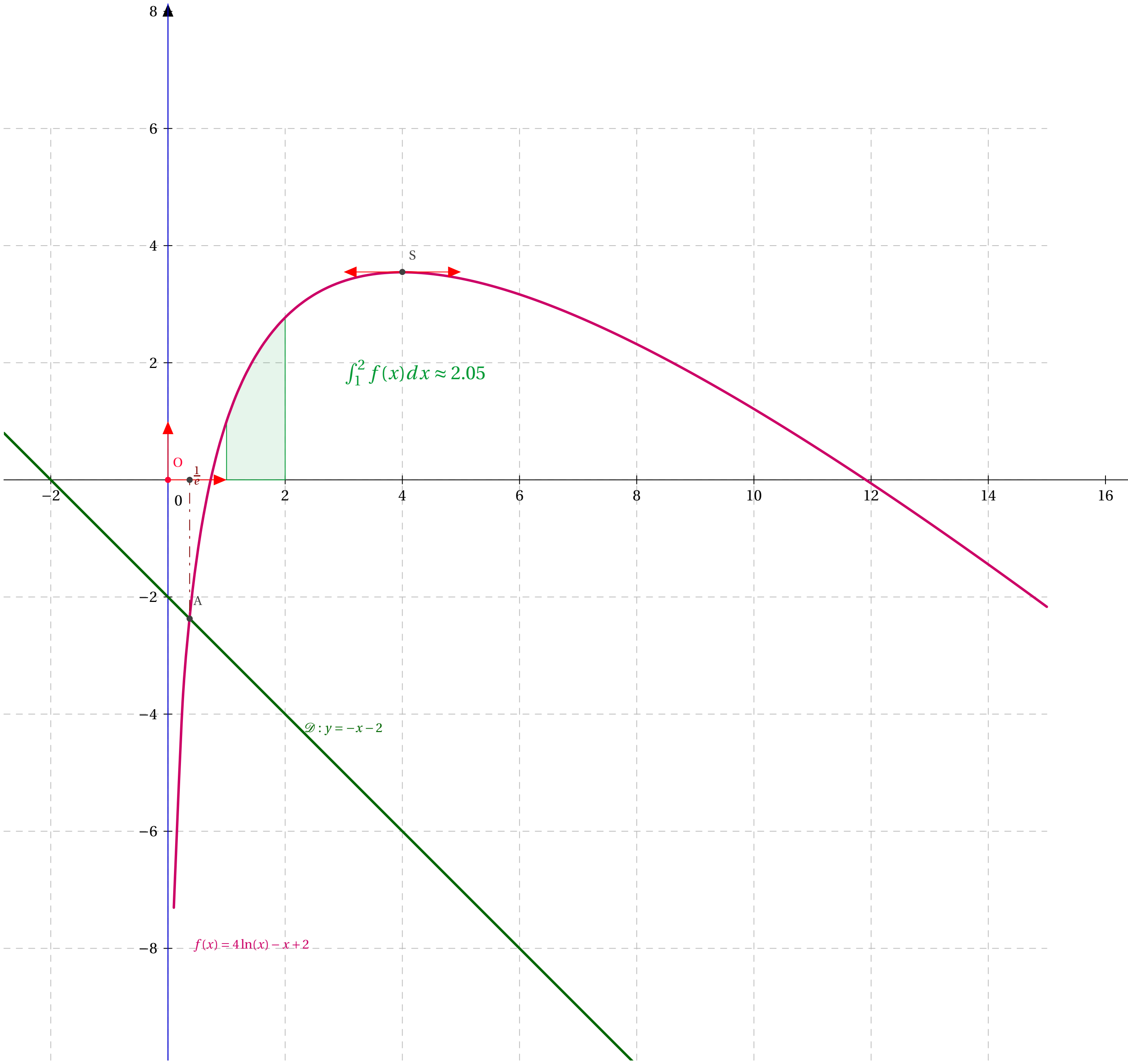
$f(x) = -x-2 \Leftrightarrow = -\ln\mathrm{e} \Leftrightarrow = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\frac{1}{\mathrm{e}}\}}$$

**4.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : (On donnera des valeurs décimales approchées à $10^{-2}$ près.)

| $x$ | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 11 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1.27 | 1 | 2.77 | 3.39 | 3.54 | 3.44 | 2.78 | 0.59 | -3.67 |

**5.** Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$




**6.** Dans le même repère, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 2$. On place deux points !
Si $x = 0$ alors $y = -2$ et si $x = 2$ alors $y = -4$. Comment peut-on graphiquement retrouver le résultat de la question **3. c.** ? La solution de l'équation $f(x) = -x - 2$ est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. On lit $\approx 0.4$ et on a bien $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.36$

**7.** On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = 4x\ln x - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

a) Démontrer que F est une primitive de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Il suffit de vérifier que $F'(x) = f(x)$

$F(x) = x\left(4\ln x - 2 - \dfrac{x}{2}\right)$

Ainsi $F = uv$, et donc $F' = u'v + v'u$

Ici $u(x) = x$ et $v(x) = 4\ln x - 2 - \dfrac{x}{2}$

donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{2}$

On a alors $F'(x) = 1 \times \left(4\ln x - 2 - \dfrac{x}{2}\right) + \left(\dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{2}\right) \times x = 4\ln x - 2 - \dfrac{x}{2} + 4 - \dfrac{1}{2} = 4\ln x - x + 2 = f(x)$

Donc F est bien une primitive de $f$.

b) Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte en fonction de $\ln 2$. $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(1)$

Or $F(x) = 4x\ln x - 2x - \dfrac{x^2}{2}$

$F(2) = 8\ln 2 - 4 - 2 = 8\ln 2 - 6$ et $F(1) = 4\ln 1 - 2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$I = 8\ln 2 - 6 + \dfrac{5}{2} = 8\ln 2 - \dfrac{7}{2}$

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 8\ln 2 - \frac{7}{2}}$$