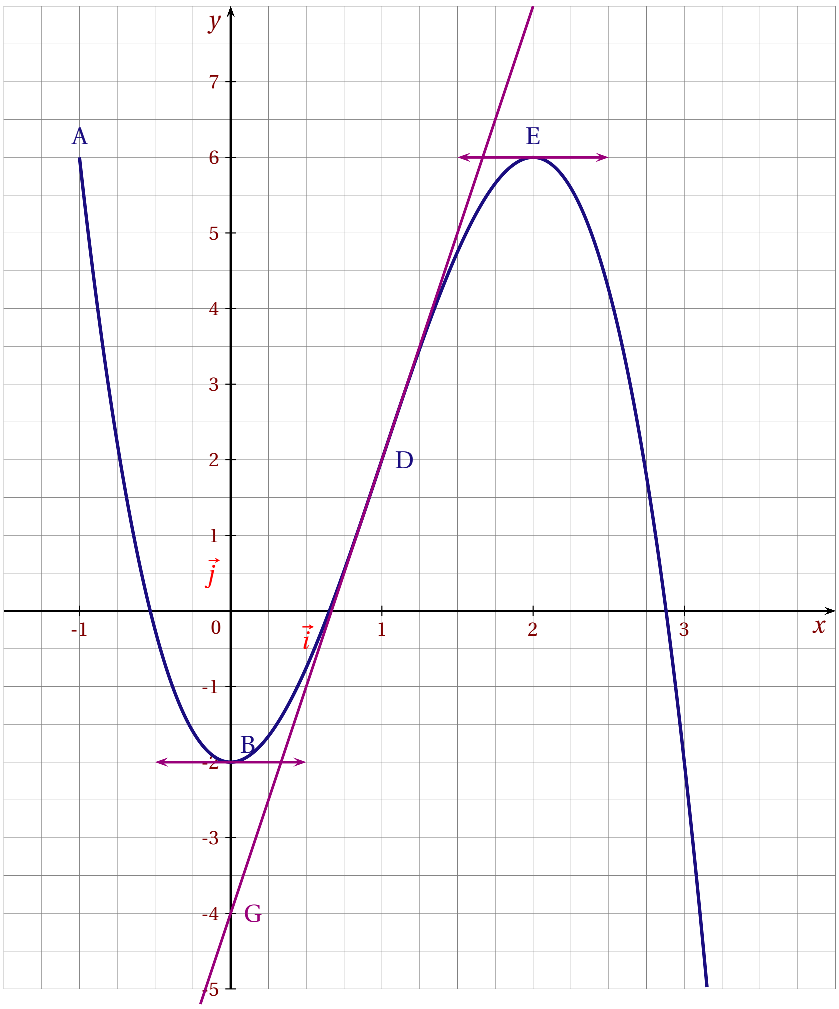
Exercice V 1 Le QCM noté à part

Exercice V 2 (5 *points*)

On considère une fonction f :
- définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$;
- strictement décroissante sur les intervalles $[-1\,;\,0]$ et $[2\,;\,+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f et F la primitive de f sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 0.
La courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Elle passe par les points A$(-1\,;\,6)$, B$(0\,;\,-2)$, D$(1\,;\,2)$ et E$(2\,;\,6)$.
Elle admet au point D une tangente passant par le point G$(0\,;\,-4)$.
Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



1. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$. Justifier les réponses.
On sait que si la fonction f est dérivable en un réel a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$.
Ici la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 admet pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1;6)$, ainsi

$$\boxed{f'(1)=6}$$

Autre méthode $f'(1) = \dfrac{y_D - y_G}{x_D - x_G} = \dfrac{2-(-4)}{1-0} = 6$ La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est horizontale donc :

$$\boxed{f'(2) = 0}$$

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D.
D'après le cours, $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, ici $a = 1$; $f'(1) = 6$ et $f(1) = 2$,
soit $y = 6(x-1) + 2 = 6x - 4$

la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D a pour équation $y = 6x - 4$.

3. Montrer que sur l'intervalle $[-1~;~0]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera x_1.

x	-1		x_1		0
$f'(x)$			$-$		
f	6	↘	0	↘	-2

- f est dérivable sur $[-1;+\infty[$, donc sur $[-1;0]$
- pour tout réel x de $]-1;0[$, on a $f'(x) < 0$, en effet f est strictement décroissante sur $[-1;0]$

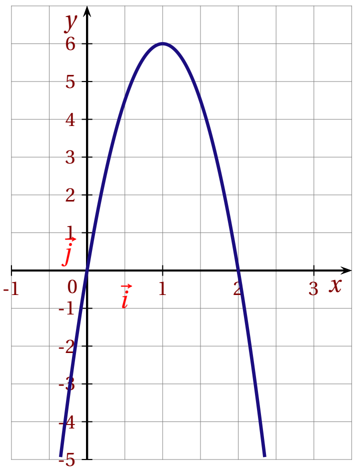
0 est compris entre $f(-1) = 6$ et $f(0) = -2$, donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique x_1 dans $[-1;0]$.

4. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$, deux autres solutions que l'on notera x_2 et x_3, avec $x_2 < x_3$. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

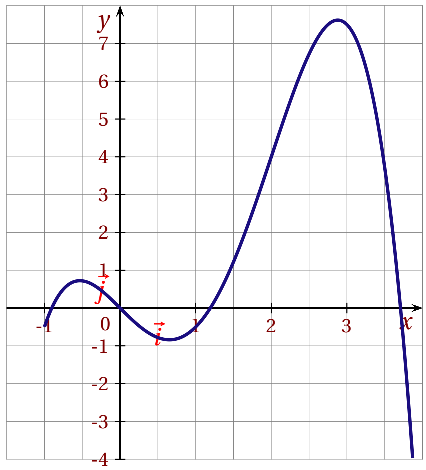
x	-1		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Parmi les trois courbes suivantes, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente F, et celle qui représente f'.
Dire que F est une primitive de la fonction f signifie que pour tout réel x de l'intervalle $[-1;+\infty[$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$. Par conséquent, les variations de F se déduisent du signe de f :

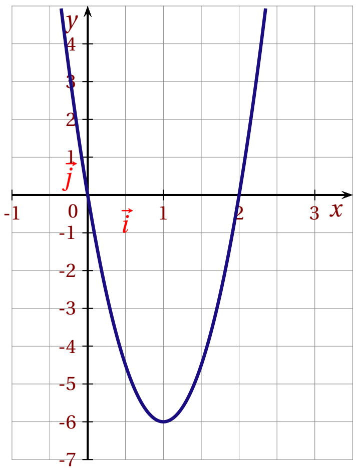
x	-1		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\mathrm{F}(x)$		↗		↘		↗		↘	



Courbe $\mathscr{C}_1$ représentative de la fonction f'



Courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de la fonction F



Courbe $\mathscr{C}_3$

La courbe C_2 est la seule des trois courbes susceptible de représenter la fonction F.
Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée. Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$. Par conséquent, pour tout réel x de l'intervalle $[0;2]$, on a $f'(x) \geq 0$. Donc la courbe C_1 est la seule des trois courbes susceptible de représenter la fonction f'.

Exercice V 3 3 points

Soit f la fonction définie sur $[-6;5]$ par $f(x) = \dfrac{15x+60}{x^2+9}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
Sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, notée C_f, est donnée en annexe ci-dessous à titre indicatif.

1. Calculer $f'(x)$.
$f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$u(x) = 15x+60$, donc $u'(x) = 15$
$v(x) = x^2$, donc $v'(x) = 2x$
Ainsi $f'(x) = \dfrac{15(x^2+9) - 2x(15x+60)}{(x^2+9)^2} = \dfrac{15x^2+135-30x^2-120x}{(x^2+9)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{-15x^2-120x+135}{(x^2+9)^2}}$$

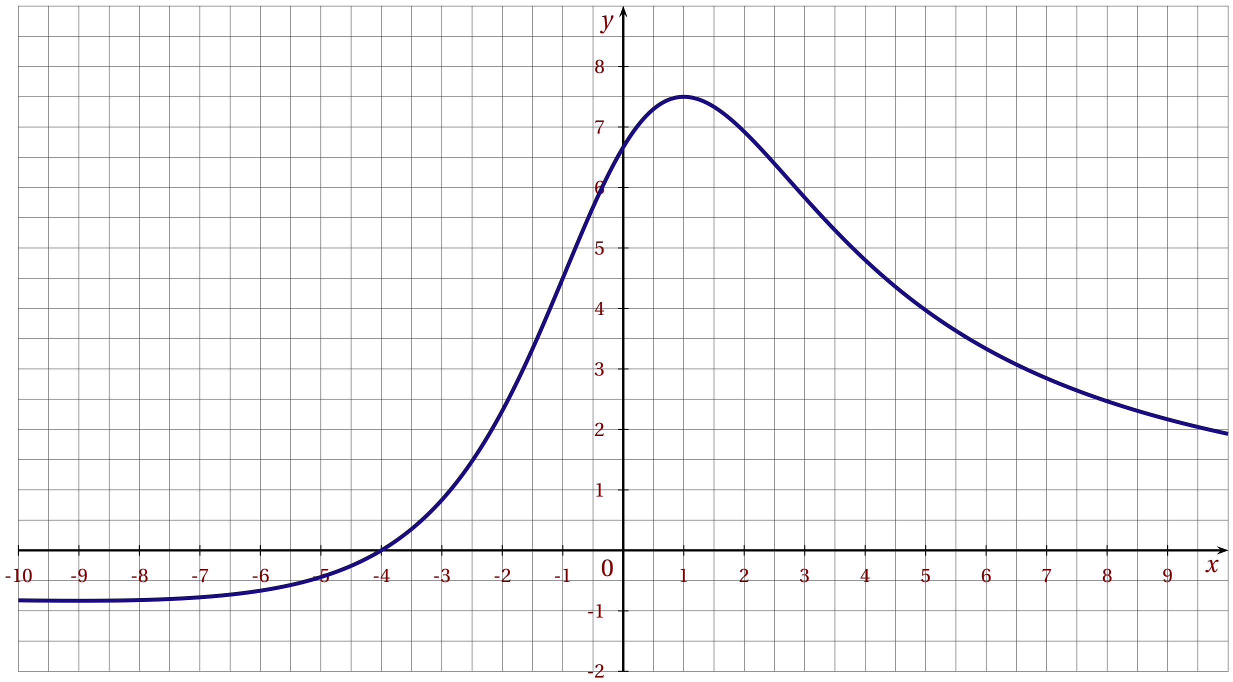
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
Le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif, ainsi $f'(x)$ a le signe de $-15x^2-120x+135 = 15(-x^2-8x+9)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-8x+9 = 0$
$\Delta = 64-4(-1)(9) = 100 = 10^2$
Ainsi l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+10}{-2} = -9$ et $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-10}{-2} = 1$
Le trinôme a donc le signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-9		1		$+\infty$
$-x^2+8x+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Donner le tableau des variations de f.

x	-6		1		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	$\frac{135}{34}$

Une courbe non demandée



Exercice V 4 6 points

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$.
On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$. $ax+b+\dfrac{c}{x+1} = \dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

Ainsi $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ et $f(x) = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

En identifiant les numérateurs, il vient : $ax^2+(2a+b)x+2b+c = x^2+3x+6$

$$\begin{cases} a & =1 \\ 2a+b & =3 \\ 2b+c & =6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & =1 \\ b & =3-2a=1 \\ c & =6-2b=4 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x+1+\frac{4}{x+2}}$$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?

On étudie le signe de $x+2$ sur $]-2;+\infty[$

$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

x	2		$+\infty$
signe de $x+2$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to-2^+} x+2=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{4}{x+2}=+\infty$

On a donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} (x+1)=-1\\ \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{4}{x+2}=+\infty\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty\text{, donc la droite d'équation } x=-2 \text{ est asymptote verticale à } \mathscr{C}_f.}$

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x+2}=0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

b) Montrer que la courbe C_f admet pour asymptote la droite d'équation $y=x+1$.

Sur $]-2;+\infty[$, on forme $f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{x+2}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x+1}=0$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y=x+1 \text{ est donc asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$

4. Calculer la dérivée de la fonction f. $f=\dfrac{u}{v}$ donc $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$u(x)=x^2+3x+6$, donc $u'(x)=2x+3$

$v(x)=x+2$, donc $v'(x)=1$

Ainsi $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x+2)-1(x^2+3x+6)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}}$$

5. Étudier les variations de f. Le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif, ainsi $f'(x)$ a le signe de $x^2+4x=x(x+4)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-4$

Le trinôme a donc le signe de $a=-1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-x^2+8x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f

x	-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

6. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

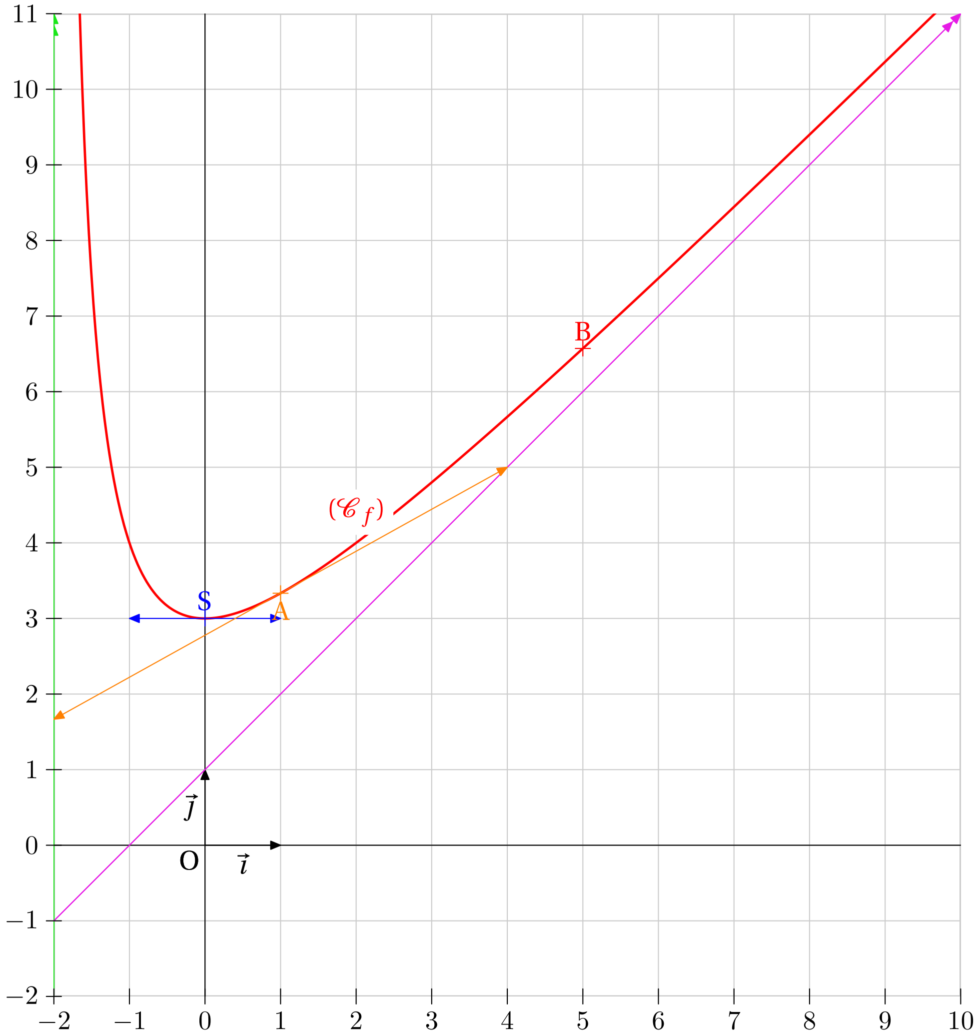
T a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

On calcule $f'(1) = \dfrac{5}{9}$

et $f(1) = \dfrac{10}{3}$ Ainsi T : $y = \dfrac{5}{9}(x-1) + \dfrac{10}{3}$

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{25}{9}$

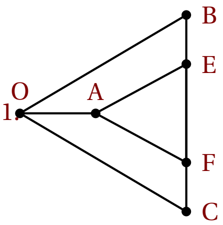
7. Représenter la courbe C_f, ses asymptotes et T.



Exercice V 5

On considère le puzzle représenté ci-contre. Il est constitué de 3 pièces : le triangle AEF et les quadrilatères AEBO et AFCO, découpés dans le triangle OBC.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, fourni en annexe 1.



1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0.$$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 64 = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64$.
Comme $\Delta < 0$ l'équation a deux racines complexes conjuguées
$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3} - 4i$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\sqrt{3} - 4i ; 4\sqrt{3} + 4i\}}$$

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_C = 4\sqrt{3} - 4i$.

a) Vérifier que $z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\boxed{re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Ici $8e^{i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \times \dfrac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i = z_B$.

Ainsi $z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) En déduire une écriture exponentielle du nombre complexe z_C.
On sait que si $z = re^{i\theta}$ alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$;
or $z_C = \overline{z_B} = \overline{8e^{i\frac{\pi}{6}}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$\boxed{z_C = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}.}$$

c) Placer précisément les points B et C dans le repère défini précédemment.
Figure à la fin !

d) Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
On a déjà $OB = |z_B| = 8$ et $OC = |z_C| = 8$,
enfin $BC = |z_C - z_B| = \left|4\sqrt{3} - 4i - 4\sqrt{3} - 4i\right| = |8i| = 8$

$$\boxed{\text{Ayant } OB = OC = BC = 8\text{, on a prouvé que OBC est un triangle équilatéral de côté 8.}}$$

3. Le point A a pour coordonnées $(3; 0)$. Le point D a pour coordonnées $(4\sqrt{3}; 0)$.

a) Écrire les affixes des points z_A et z_D des points A et D.
$z_A = x_A + i\,y_A = 3$ et $z_D = 4\sqrt{3}$

b) Calculer les affixes du point E milieu du segment [BD] et du point F milieu du segment [CD],
$z_E = \dfrac{1}{2}(z_B + z_D) = \dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3} + 4i + 4\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 2i$
$z_F = \dfrac{1}{2}(z_C + z_D) = \dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - 4i + 4\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} - 2i$.

$$\boxed{z_E = 4\sqrt{3} + 2i \text{ et } z_F = 4\sqrt{3} - 2i}$$

c) Placer les points A, D, E et F dans le repère figurant en annexe 1.
sur la figure !