DEVOIR SURVEILLÉ N° VII : Nombres complexes
TSTI2D
Le corrigé

Exercice VII 1

On donne les nombres complexes et $z=-2+i$ et $z'=2+3i$
Mettre sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

$$z+z'; z-z'; z\times z'; z^2; \frac{z}{z'}; \frac{2+z}{1-z'}$$

$z+z'=-2+i+2+3i=4i$
$z-z'=-2+i-(2+3i)=-2+i-2-3i=-4-2i$

$z\times z'=(-2+i)(2+3i)=-4-3-6i+2i=-7-4i$
$\frac{z}{z'}=\frac{-2+i}{2+3i}=\frac{(-2+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{-4+3+6i+2i}{2^2+3^2}=\frac{-1+8i}{13}=-\frac{1}{13}+\frac{8}{13}i$
$\frac{2+z}{1-z'}=\frac{2+(-2+i)}{1-(2+3i)}=\frac{i}{-1-3i}=\frac{i(-1+3i)}{1^2+3^2}=\frac{-3-i}{10}=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$

Exercice VII 2

1. $z^2+2z+10=0 \iff (z+1)^2-1+10=0 \iff (z+1)^2+9=0 \iff (z+1)^2-(3\mathrm{i})^2=0 \iff (z+1+3\mathrm{i})(z+1-3\mathrm{i})=0.$
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$\{-1-3\mathrm{i}\,;\,-1-3\mathrm{i}\}.$$
   Autre méthode : $\Delta=4-40=-36=(6\mathrm{i})^2\ldots$
2. $\begin{cases}-2c+d &= 1+13\mathrm{i}\\ -c+d &= 4+8\mathrm{i}\end{cases} \Rightarrow$ par différence $c=3-5\mathrm{i}$, d'où $d=c+4+8\mathrm{i}=3-5\mathrm{i}+4+8\mathrm{i}=7+3\mathrm{i}$.

Exercice VII 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+6z+18=0$.
   On résout en utilisant la méthode du discriminant. On trouve $\Delta=-36$, d'où les 2 racines complexes conjuguées :
   $$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-6+6i}{2}=-3+3i$$
   $$z_2=\overline{z_1}=-3-3i.$$
   Conclusion : $\mathrm{S}=\{-3+3i;-3-3i\}$
2. On note respectivement A et B les points d'affixes respectives
   $$z_1=-3+3i \text{ et } z_2=-3-3i.$$
   Construire les points A et B.

3. a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
   Forme trigonométrique de $z_1=-3+3i$:
   Module : $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
   Argument :
   $$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{r}=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{r}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

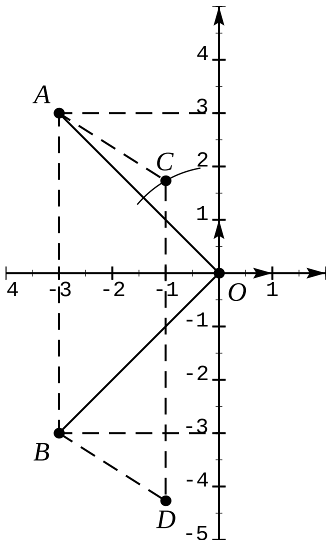

FIGURE 1 –

Ainsi $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient ; on a donc :

$$z_1 = [3\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}] \text{ ou } z_1 = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

Forme trigonométrique de $z_2 = -3-3i$:
Module : $|z_2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
Argument :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ convient ; on a donc :

$$z_2 = [3\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4}] \text{ ou } z_2 = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.
Connaissant les affixes de A et B, on en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où le produit scalaire

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x.x' + y.y' = -3 \times 3 - 3 \times (-3) = 0$$

ce qui prouve que AOB rectangle en O . De plus, on a vu que les modules $|z_A|$ et $|z_B|$ son égaux, ce qui prouve que les distances OA et OB sont égales. Le triangle AOB est donc également isocèle .

4. On appelle C le point d'affixe $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_3

Module : $|z_3| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$
Argument :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ convient ; on a donc :

$$z_3 = [2; \frac{2\pi}{3}] \text{ ou } z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

b) Déterminer la forme algébrique du produit $z_1 \times z_3$.
En utilisant les formes algébriques de z_1 et z_3, il vient

$$z_1 \times z_3(-3+3i)(-1+i\sqrt{3}) = (-3+3i)(-1+i\sqrt{3}) = 3+3i\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3} = 3-3\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-3)$$

$$\text{d'où } z_1 \times z_3 = 3(1-\sqrt{3})-3i(1+\sqrt{3}) = 3(1-\sqrt{3})-3i(1+\sqrt{3})$$

5. a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C \Leftrightarrow z_B - z_A + z_C = z_D \Leftrightarrow z_D = (-3-3i)-(-3+3i)+(-1+i\sqrt{3})$$

$$\text{Soit } z_D = -1 + (\sqrt{3}-6)i$$