Exercice 1 (4 points)

Un QCM

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
On demande de recopier sur la copie chaque proposition complétée par la réponse choisie.Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

On considère une fonction f définie sur et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	0

1. On peut affirmer que ...
Par simple lecture du tableau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. La courbe représentative de la fonction f admet ...
– la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet ...
– 2 solutions.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
Sur chacun des intervalles où la fonction est strictement monotone, nous pouvons appliquer le théorème de la valeur intermédiaire :

- sur l'intervalle $]-\infty; -2]$
f est dérivable et strictement décroissante à valeurs dans $[-1; +\infty[$ et $0 \in [-1; +\infty[$ donc l?équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-\infty; -2]$.
- sur l'intervalle $[-2; 2]$

  f est dérivable et strictement croissante sur$[-2; 2]$ à valeurs dans $[-1; 3]$ et $0 \in [-1; 3]$ donc l?équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-2; 2]$.
- sur l'intervalle $[2, +\infty[$
f est dérivable et strictement décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'où pour tout réel x de l'intervalle $[2, +\infty[$, $f(x) > 0$ donc l?équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[2, +\infty[$.

Ainsi, dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.

4. Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$ ...
– a toutes ses solutions négatives.
Sur l'intervalle $[-2; +\infty[$, le maximum de la fonction f est égal à 3, donc pour tout réel $x \geq -2; f(x) \leq 3$.
Sur l'intervalle $]-\infty; -2]$, f est dérivable et et strictement décroissante à valeurs dans $[-1; +\infty[$ et $3 \in [-1; +\infty[$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un réel unique $\alpha \in]-\infty; -2]$ tel que $f(\alpha) = 3$. Or f est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc pour tout réel $x < \alpha$, $f(x) > 3$ avec $\alpha < -2$.
Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$ a toutes ses solutions négatives.

Exercice 2 (4 points)

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0; +\infty[$.
On sait que :
– $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$;
– la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point $(2; 0)$;

– la courbe (C) admet pour asymptote l'axe des abscisses.

1. On peut affirmer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car la courbe (C) admet pour asymptote l'axe des abscisses.

2. La droite d'équation $x = 0$ n'est pas asymptote à la courbe (C) en effet la limite de f en 0 n'est pas infinie ! On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Laquelle de ces trois courbes est la courbe représentative de la fonction g ?

D'après le tracé de (C), on lit le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
signe de $f(x)$	0	+	0	−	

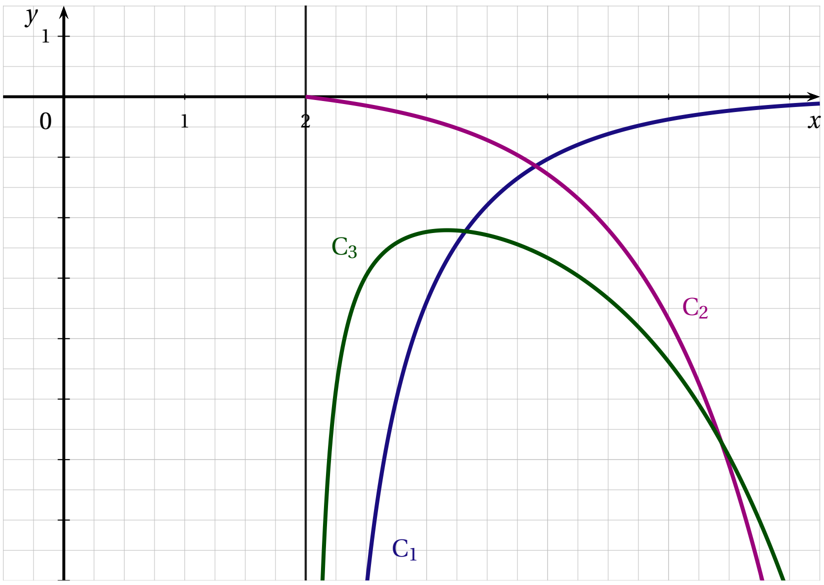
On a donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0^-$, d'où on déduit $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, ce qui permet d'affirmer que la courbe est admet pour asymptote la droite d'équation $x = 2$,

C'est donc la courbe C_1 ou C_3.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$ en effet la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C et $f(x) < 0$ au voisinage de $-\infty$, d'où on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

C'est donc la courbe C_2 ou C_3.

Conclusion :la courbe de la fonction g est représentée par la courbe C_3.



Exercice 3 3 (5,5 *points*)

1. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=1-2x+\dfrac{1}{4-2x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) Montrer que $f(x)=\dfrac{4x^2-10x+5}{4-2x}$

$$f(x)=1-2x+\frac{1}{4-2x}=\frac{(1-2x)(4-2x)}{4-2x}+\frac{1}{4-2x}=\frac{4-2x-8x+4x^2}{4-2x}=\frac{4x^2-10x+5}{4-2x}$$

On a donc bien $f(x)=\dfrac{4x^2-10x+5}{4-2x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4-2x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4-2x}=0$

On a donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4-2x}=0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.

On étudie le signe de $4-2x$ sur $]2;+\infty[$

$4-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$

x	0		2		$+\infty$
signe de $4-2x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to2^+} 4-2x=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{4-2x}=-\infty$

On a donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}(1-2x)=-3\\ \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{4-2x}=-\infty\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$, donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

d) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième asymptote d'équation $y=1-2x$.

Sur $]2;+\infty[$, on forme $f(x)-(1-2x)=\dfrac{1}{4-2x}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-2x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4-2x}=0$

$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = 1 - 2x \text{ est donc asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

2. Calculer la dérivée de la fonction f ; on montrera que $f'(x) = \dfrac{-8x^2+32x-30}{(4-2x)^2}$

On dérive $f(x) = \dfrac{4x^2-10x+5}{4-2x}$, on a $f = \dfrac{u}{v}$, d'où on déduit $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Comme $u(x) = 4x^2 - 10x + 5$; on déduit $u'(x) = 8x - 10$

De même $v(x) = 4 - 2x$, et donc $v'(x) = -2$

On a alors $f'(x) = \dfrac{(8x-10)(4-2x)-(-2)(4x^2-10x+5)}{(4-2x)^2} = \dfrac{32x-16x^2-40+20x+8x^2-20x+10}{(4-2x)^2}$

$$\boxed{\text{On a bien } f'(x) = \dfrac{-8x^2+32x-30}{(4-2x)^2}}$$

3. Étudier les variations de f

On étudie le signe de la dérivée :

- Le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif.
  La dérivée a donc le signe du numérateur.
- Le numérateur est un trinôme du second degré qui a pour racines $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$; il a donc le signe de $a = -8$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $-8x^2+32x-30$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de f sur $]2;+\infty[$:

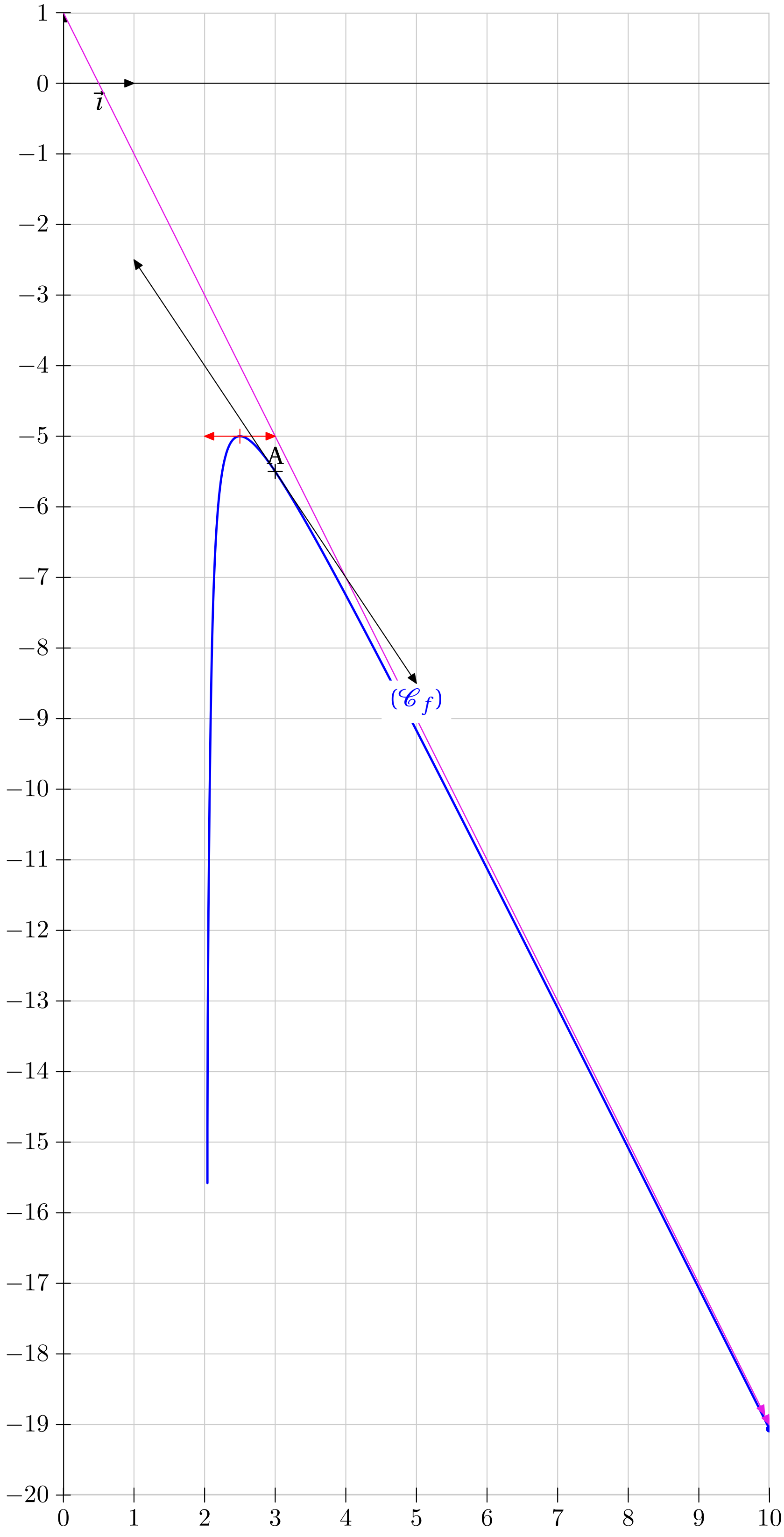
x	2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. T a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

- $f'(3) = \dfrac{-72+96-30}{4} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$
- $f(3) = \dfrac{36-30+5}{-2} = -\dfrac{11}{2}$

$$\boxed{\text{T a pour équation } y = -\dfrac{3}{2}(x-3) - \dfrac{11}{2}, \text{ soit } y = -\dfrac{3}{2}x - 1}$$

5. Tracer T, $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.



$\vec{\imath}$
A
$(\mathscr{C}_f)$

Exercice 4 4 (6,5 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
En $-\infty$ et $+\infty$ la limite de f est celle de son terme de plus haut degré, donc de $-x^3$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2. On note f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) = -3x^2 - 4x + 4}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$.
On trouve un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 64$ qui a deux racines : $\dfrac{4+8}{-6} = -2$ et $\dfrac{4-8}{-6} = \dfrac{2}{3}$.
Or un polynôme du second degré est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur des racines, d'où les variations de f. On doit aussi calculer les extrema locaux :

$$f(-2) = 8 - 8 - 8 + 2 = -6$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 2 = \frac{94}{27} \approx 3.48$$

c) Donner le tableau des variations de f. (*Faire figurer les limites obtenues, ainsi que les valeurs des extremums de f*)
Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$\frac{94}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 7$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4; -3]$.

x	-4		α		-3
$f'(x)$			$-$		
f	18	$\searrow$	7	$\searrow$	-1

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-4; -3]$
- pour tout réel x de $]-4; -3[$, on a $f'(x) < 0$

7 est compris entre $f(-4) = 18$ et $f(-3) = -1$, donc l'équation $f(x) = 7$ a une racine unique α dans $[-4; -3]$. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au dixième près.

- $f(-3.6) \approx 8.3$
- $f(-3.5) \approx 6.4$

Ayant $f(-3.5) < 7 < f(-3.5)$ et f strictement décroissante sur $[-4; -3]$:

$$\boxed{-3.6 < \alpha < -3.5}$$

Exercice 5 (Bonus ! 2 *points*)

Signe d'un polynôme du troisième degré Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 54$

1. Vérifier que $P(3) = 0$.
$P(3) = 3^3 + 3 \times 3^2 - 54 = 27 + 27 - 54 = 0$

2. En déduire une factorisation de $P(x)$
Comme $P(3) = 0$; on déduit que $P(x)$ se factorise par $(x - 3)$.
On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & +3x^2 & & -54 & x & -3 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & +3x^2 & & & x^2 & +6x & +18 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & & -54 & & & \\
 & -6x^2 & +18x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 18x & -54 & & & \\
 & & -18x & -54 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Conclusion : $P(x) = (x - 3)(x^2 + 6x + 18)$

3. En déduire le signe de $P(x)$.
$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 6x + 18) = 0 \Leftrightarrow (x + 3) = 0$ ou $(x^2 + 6x + 18) = 0$
Le trinôme $x^2 + 6x + 18$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 4 \times 18 = -36$.
$\Delta < 0$; donc le trinôme n'a pas de racine réelle, de plus il a le signe de $a = 1$ sur $\mathbb{R}$,
donc pour tout x réel, on a $x^2 + 6x + 18 > 0$

x	0		2		$+\infty$
signe de $x - 3$		$-$	0	$+$	
signe de $x^2 + 6x + 18$		$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	