# TSTI2D Le corrigé

## Exercice II 1

Dans chacun des cas suivants, $f$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer la dérivée $f'(x)$.

**1.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$

On obtient $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$

**2.** $f$ est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} + 1 = 3x^2 - 3 \times \dfrac{1}{x} + 1$

On obtient $f'(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2}$

**3.** $f$ est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - x$

On obtient $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

## Exercice II 2

**1.** $\mathscr{D}_f = ]-\infty\,;\,5,5\,]$.

**2.** $f(-2) = 1,5$ et $f(0) = 5$.

**3.** $f(3) = 0$.

**4.** $\mathscr{S} = \{-1;1\}$.

**5.** Les antécédents de $\dfrac{3}{2}$ par $f$ sont $-2$ et $2$.

**6.** tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $5.5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**7.** $\mathscr{S} = ]-\infty\,;\,-4,5\,] \cup [\,3,5\,;\,5\,]$

**8.** $\mathscr{S} = ]-4;3[$

## Exercice II 3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

**1.** On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$, calculer $f'(x)$.

$f$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables. $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\begin{cases} u(x) = 5x-3 \\ v(x) = x^2+x+1 \end{cases} \text{donc} \begin{cases} u'(x) = 5 \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{5(x^2+x+1)-(5x-3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{5x^2+5x+5-(10x^2+5x-6x-3)}{(x^2+x+1)^2}$

Ainsi, la dérivée de la fonction $f$ est la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$.

Les variations de la fonction $f$ se déduisent du signe de sa dérivée.

Pour tout réel $x, (x^2+x+1)^2 > 0$. Donc $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $-5x^2+6x+8$ avec $a=-5, b=-6$ et $c=8$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2-4ac$ d'où :

$\Delta = 36+160 = 196 = 14^2$

$\Delta > 0$ ; donc le polynôme a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ Soit $x_1 = \dfrac{-6-14}{-10} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Soit $x_2 = \dfrac{-6+14}{-10} = -0,8$

Un polynôme du second degré est du signe de $a$ sauf pour les valeurs comprises entre les racines. Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel $x$ ainsi que les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-0.8$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-0.8$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $-\frac{25}{3}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

calcul des extrema :

La fonction $f$ admet un minimum relatif en $-0,8$ et $f(-0,8) = \dfrac{-4-3}{0,64-0,8+1} = -\dfrac{7}{0,84} = -\dfrac{700}{84} = -\dfrac{25}{3}$

La fonction $f$ admet un maximum relatif en 2 et $f(2) = \dfrac{10-3}{4} + 2 + 1 = \dfrac{7}{7} = 1$

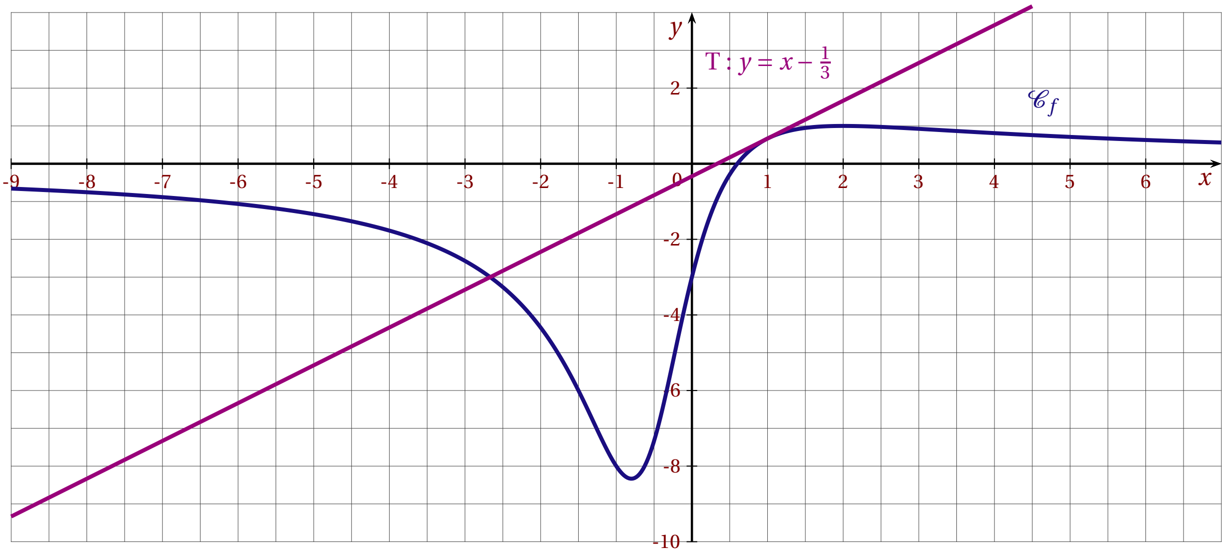
**3.** Donner une équation de la tangente T à la courbe $C_f$ au point A d'abscisse 1.

La tangente T à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ Or $f(1) = \dfrac{5-3}{1+1+1} = \dfrac{2}{3}$, et $f'(1) = \dfrac{-5+6+8}{(1+1+1)^2} = \dfrac{9}{9} = 1$

D'où une équation de la tangente T : $y = 1\times(x-1)+\dfrac{2}{3}$

La tangente T à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y = x - \dfrac{1}{3}$.

Représentons la tangente T sur le graphique ci-dessous.




## Exercice II 4

On veut résoudre l'équation $x^3 + 4x - 6$ sur $\mathbb{R}$.

**1.** Etudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 4x - 6$

- Dérivée : On a $f'(x) = 3x^2 + 4$
- Signe de la dérivée : On a pour tout réel $x$; $x^2 \geq 0$ ; donc $3x^2 \geq 0$ puis $3x^2 + 4 \geq 4 > 0$.
  Donc pour tout réel $x$, on a $f'(x) > 0$
- Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | | |
| Variation de $f$ | $-\infty$ | -1 | 10 | $+\infty$ |

**2.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ dans $[1;2]$. On utilisera ici un **théorème précis du cours**.
$f$ est dérivable sur $[1;2]$
Pour tout $x \in [1;2]$, on a $f'(x) > 0$. 0 est compris entre $f(1) = -1$ et $f(2) = 10$ ;
donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique $\alpha$ dans $[1;2]$.

**3.** Encadrer $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
A laide d'une calculatrice, on obtient $f(1,13) \approx -0,04$ et $f(1,14) \approx 0,04$

Donc $1,13 < \alpha < 1,14$

## Exercice II 5

**1.** a) $\boxed{P(1) = 0}$.

b) 1 est racine, on peut donc factoriser P par $(x-1)$.
On obtient $P(x) = (x-1)R(x)$ avec $deg(R) = 3 - 1 = 2$ d'où $R(x) = ax^2 + bx + c$.

c) $$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=3 \\ c-b=-8 \\ -c=3 \end{cases} \implies \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-3 \end{cases}$$

d) $\mathrm{P}(x)=0 \iff (x-1)(2x^2+5x-3)=0$.

Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul, soit :

- $x-1=0$ donc $x=1$,
- $2x^2+5x-3=0$ : $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times2\times-3=49$.

  Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-7}{2\times2}=-3$ | $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+7}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-3;\dfrac{1}{2};1\right\}}$.

**2.** a) Si on pose $\mathrm{X}=\sin x$ dans $2(\sin x)^3+3(\sin x)^2-8\sin x+3=0$, on obtient $2x^3+3x^2-8x+3=0$.

Or, les solutions de cette dernière équation sont

- $\mathrm{X}=-3$ soit $\sin x=-3$ : impossible,
- $\mathrm{X}=\dfrac{1}{2}$ soit $\sin x=\dfrac{1}{2}$ donc $x=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$,
- $\mathrm{X}=1$ soit $\sin x=1$ donc $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right\}}$.

b) Si on pose $\mathrm{X}=x^2$ dans $2x^6+x^4-13x^2+6=0$, on obtient $2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-13\mathrm{X}+6=0$.

Or, les solutions de cette dernière équation sont

- $\mathrm{X}=-3$ soit $x^2=-3$ : impossible,
- $\mathrm{X}=\dfrac{1}{2}$ soit $x^2=\dfrac{1}{2}$ donc $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\mathrm{X}=1$ soit $x^2=1$ donc $x=1$ ou $x=-1$,

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right\}}$.