Devoir en temps libre n° III : Nombres complexes
TSTI2D Le corrigé

TSTI2D 2013

Exercice III 1

1. On a $\Delta = 36 - 40 = -4 = (2\mathrm{i})^2$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{6+2\mathrm{i}}{2} = 3+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad 3-\mathrm{i}.$$

Ou bien : $z^2 - 6z + 10 = 0 \iff (z-3) - 9 + 10 = 0 \iff (z-3)^2 + 1 = 0 \iff (z-3)^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \iff (z-3-\mathrm{i})(z-3+\mathrm{i})$ et l'on retrouve les deux solutions.

2. a) $\mathrm{P}(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 46 \times 6 - 60 = 216 - 432 + 276 - 60 = 492 - 492 = 0$. On peut donc factoriser $\mathrm{P}(z)$ par $z - 6$).

b) $\mathrm{P}(z) = (z-6)\left(az^2 + bz + c\right) \iff z^3 - 12z^2 + 46z - 60 = (z-6)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3 - 12z^2 + 46z - 60 = az^3 + bz^2 + cz - 6az^2 - 6bz - 6c \iff z^3 - 12z^2 + 46z - 60 = az^3 + (b-6a)z^2 + (c-6b)z - 6c \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-6a & = & -12 \\ c-6b & = & 46 \\ -6c & = & -60 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -6 \\ c & = & 10 \\ c & = & 10 \end{array}\right.$

On a donc

$$\mathrm{P}(z) = z^3 - 12z^2 + 46z - 60 = (z-6)\left(z^2 - 6z + 10\right).$$

c) $\mathrm{P}(z) = 0 \iff (z-6)\left(z^2 - 6z + 10\right) = 0$. Les solutions sont donc $z = 6$ et les solutions de l'équation de la question 1.

$$\mathrm{S} = \{6 \quad ; \quad 3+\mathrm{i} \quad ; \quad 3-\mathrm{i}\}$$

3. Voir plus bas

4. Le milieu de [OC] a pour cooordonnées (3 ; 0) ;

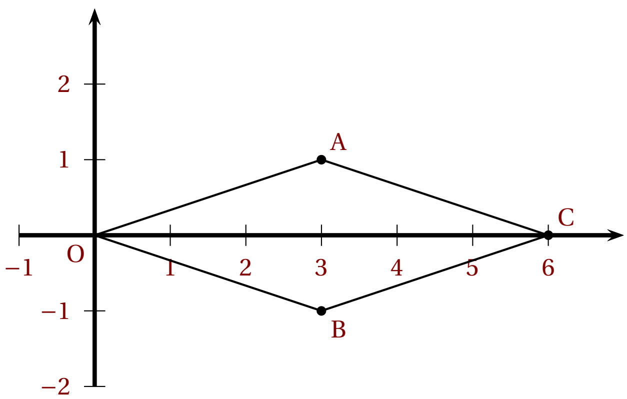
Celui de [AB] a pour cooordonnées $\left(\dfrac{3+3}{2} ; \dfrac{1-1}{2}\right) = (3 ; 0)$.

[OC] et [AB] ont le même milieu : le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

5. $\mathrm{OA} = |3+\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$;

$\mathrm{OB} = |3-\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.

Le quadrilatère OACB a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.



Exercice III 2

Écrire en langage codé un algorithme

Il était une fois un empereur hindou, Chiram, qui voulut récompenser l'un de ses sujets, Seta, pour son invention merveilleuse : le jeu des échecs.

« Comment veux-tu être récompensé ? demanda Chiram. »

Donne-moi 2 grains de riz pour la première case de mon échiquier, répondit Seta. Puis 4 grains pour la deuxième case, 8 grains pour la troisième, et encore le double pour la quatrième et ainsi de suite jusqu ?à la soixante-quatrième case.

Accordé ! répondit Chiram, qui trouvait ridicules ces quelques grains ...

Écrire un algorithme qui affiche :

- le nombre de grains de riz sur chacune des 64 cases de l'échiquier,

Correction à l'aide de XCAS

```
1 Nb_grains_case(n):={local c,k;
c:=2;
k:=0; ;tantque k<n faire c:=2*c; k:=k+1;ftantque
Return(c)};
```

$$\mathrm{expr}\left((\mathrm{n}) - >\{\mathrm{localc, k; c := 2; k := 0; tantque([0, k<n, 0, \{c := 2*c; k := k+1;\}]); return(c);\}, 0}\right) \tag{1}$$

```
2 Nb_grains_case(20);
```

$$2097152 \tag{2}$$

```
3 seq(Nb_grains_case(n),n=1..20);
```

$$4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152 \tag{3}$$

- le nombre total de grains,

```
4 Nb_total_grains_sur_les_cases(n):={local S, c,k;
c:=1;S:=0;
k:=1; ;
tantque k<=n faire
c:=2*c;
S:=S+c;
k:=k+1;ftantque
Return(S)};
```

$$\mathrm{expr}\left((\mathrm{n}) - >\{\mathrm{localS, c, k; c := 1; S := 0; k := 1; tantque([0, k< = n, 0, \{c := 2*c; S := S+c; k := k+1;\}]); return(S);\}, 0}\right) \tag{4}$$

```
5 Nb_total_grains_sur_les_cases(1);
```

$$2 \tag{5}$$

```
6 seq(Nb_total_grains_sur_les_cases(n),n=1..5);
```

$$2, 6, 14, 30, 62 \tag{6}$$

```
7 Nb_total_grains_sur_les_cases(64);
```

$$36893488147419103230 \tag{7}$$

- la masse de grains en tonnes (prendre 1 g pour un grain de riz).

```
8 En_tonnes:=evalf(36893488147419103230*10^(-6));
```

$$36893488147419.101562 \tag{8}$$

```
9 En_annees:=evalf(En_tonnes/(600*10^6),0);
```

$$61489.000000 \tag{9}$$

```
10
```

Seta demandait donc la production mondiale de 61489 années !

(Production mondiale actuelle 600 millions de tonnes...)

Exercice III 3

Création d'un algorithme qui permet de calculer la somme S détenue à la banque après un nombre N d'années.
On suppose que la somme placée au départ est 5000 €et qu'elle est placée à un taux d'intérêts composés de 3.5 % par an. On cherche le nombre d'années nécessaires pour que cette somme dépasse 10000 €

Correction à l'aide de XCAS

1
```
Epargne(n):={
local P,k;
P:=5000;
k:=0; ;tantque k<n faire P:=1.035*P; k:=k+1;ftantque
Return(evalf(P,2));};
```

$$\mathrm{expr}\left((n)->\{\mathrm{local}P,k;P:=5000;k:=0;\mathrm{tantque}([0,k<n,0,\{P:=1.035*P;k:=k+1;\}]);\mathrm{return}(\mathrm{evalf}(P,2));\},0\right) \tag{10}$$

2
```
Epargne(12);
```

$$7555.340000 \tag{11}$$

3
```
seq(Epargne(n),n=0..15);
```

$$5000.000000, 5175.000000, 5356.130000, 5543.590000, 5737.620000, 5938.430000, 6146.280000, 6361.400000, 6584.050000, 6814.490000, 705 \tag{12}$$

4
```
Double_Capital(t ):={
local CI,P,k;
CI:=5000;
P:=5000;
k:=0; ;tantque P<2*CI faire P:=1.035*P; k:=k+1;ftantque
Return([k,evalf(P,2)]);};
```

$$\mathrm{expr}\left((t)->\{\mathrm{local}CI,P,k;CI:=5000;P:=5000;k:=0;\mathrm{tantque}([0,P<(2*CI),0,\{P:=1.035*P;k:=k+1;\}]);\mathrm{return}([k,\mathrm{evalf}(P,2)]);\},0\right) \tag{13}$$

5
```
Double_Capital( 2);
```

$$[21, 10297.160000] \tag{14}$$

La somme aura doublé au bout de 21 ans !