DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° II : Dérivées, fonctions, équation

TSTI2D Le corrigé

TSTI2D 2013

Exercice II 1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$.
On a sans peine : $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

b) Étudier le signe de $f'(x)$.
$f'(x)$ est un trinôme du second degré qui a pour racines 0 et 4 ; il a donc le signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$3x^2 - 12x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	-42	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de α arrondie au centième près.

- Sur $]-\infty;0]$:
D'après l'étude des variations précédente,sur $]-\infty;0]$; f présente un maximum en 0 qui vaut $f(0) = -10$, ce maximum est négatif, donc pour tout réel x de $]-\infty;0]$ on a $f(x) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;0]$.
- Sur $]0;+\infty[$:

x	6		α		7
$f'(x)$			$+$		
Variations de f	-10	$\nearrow$	0	$\nearrow$	39

f est dérivable sur $[6;7]$
Pour tout $x \in [6;7]$, on a $f'(x) > 0$. 0 est compris entre $f(6) = -10$ et $f(7) = 39$;
donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[6;7]$.
- Encadrer α à 10^{-2} près.
A laide d'une calculatrice, on obtient $f(6,25) \approx -0,23$ et $f(6,26) \approx 0,19$

$\boxed{\text{Donc } 6,25 < \alpha < 6,26}$

Exercice II 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1-2x-\dfrac{3}{x^2+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Soit D la droite d'équation $y = 1-2x$ .Etudier la position relative de la droite D par rapport à la courbe C_f .

On étudie le signe de $y_{C_f} - y_D = f(x)-(1-2x) = 1-2x-\dfrac{3}{x^2+1}-(1-2x) = -\dfrac{3}{x^2+1}$

Le carré d'un réel étant toujours positif, on déduit que pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, puis $x^2+1 \geq 1 > 0$, alors comme -3<0, on déduit $-\dfrac{3}{x^2+1} < 0$.

Donc pour tout réel$x$ on a $y_{C_f} - y_D < 0$; ce qui prouve :

La courbe C_f est située en dessous de D sur $\mathbb{R}$.

2. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.

✍ $f(x) = 1-2x-\dfrac{3}{x^2+1}$, on a donc $f = u+v$ où $u(x) = 1-2x$ et $v(x) = -\dfrac{3}{x^2+1} = -3 \times \dfrac{1}{x^2+1}$

On a donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -3 \times \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$

On a utilisé la formule de dérivation

$$\left(\frac{1}{a}\right)' = -\frac{a'}{a^2}.$$

On a donc $f' = u'+v'$

Et donc $f'(x) = -2+\dfrac{6x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}+\dfrac{6x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^4-4x^2+6x-2}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x) == \frac{2(-x^4-2x^2+3x-1)}{(x^2+1)^2}$$

3. Etudier son signe. Pour tout réel x on a $(x^2+1)^2 > 0$ et 2>0 ; donc $f'(x)$ a le signe de $-x^4-2x^2+3x-1$.

Avec une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de géométrie dynamique, on conjecture que $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

★ Sur $]-\infty;0[$; on a $x < 0$ donc $3x < 0$ de la même façon on a $-x^4-2x^2-1 < 0$, comme la somme de deux réels négatifs est un réel négatif, on a prouvé :

Pour tout $x < 0$; $f'(x) < 0$.

★ Sur $[1;+\infty[$, on a :

$$\begin{cases} x^4 & \geq x \\ 2x^2 & \geq 2x \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens on obtient si $x \geq 1$ alors $x^4+2x \geq 3x$

Soit $-x^4-2x^2+3x \leq 0$ puis en ajoutant -1 :

$-x^4-2x^2-1+3x \leq -1 < 0$, et donc on a prouvé :

Pour tout $x \geq 1$; $f'(x) < 0$.

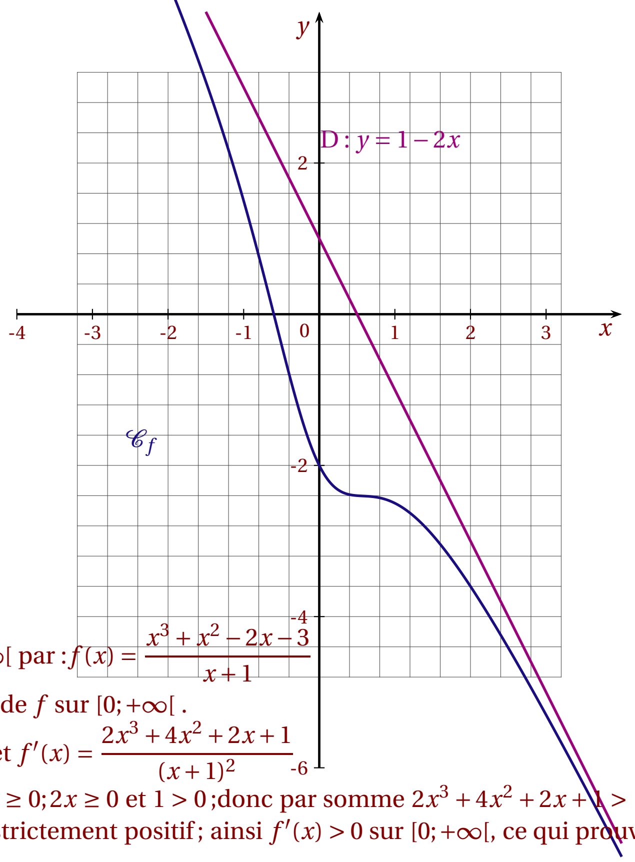
★ Sur $[0;1]$, un tracé à l'aide d'une calculatrice ou un logiciel permet de voir que :

Pour tout $x \in [0;1]$; $f'(x) < 0$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

Un tracé non demandé :



Exercice II 3

On définit la fonction f sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{x+1}$

1. a) Etudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+2x+1}{(x+1)^2}$

Or si $x \geq 0$ on a $2x^3 \geq 0; 4x^2 \geq 0; 2x \geq 0$ et $1 > 0$;donc par somme $2x^3+4x^2+2x+1 > 1 > 0$, le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif; ainsi $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

$f(1) = -\dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$

Quelle conjecture peut-on formuler sur la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$?

- Sur $[1;2]$:
  f est dérivable sur $[1;2]$
  Pour tout $x \in [1;2]$, on a $f'(x) > 0$. 0 est compris entre $f(1) = -\dfrac{3}{2}$ et $f(7) = \dfrac{5}{3}$;
  donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[1;2]$.
- Sur $[0;1]$:
  Si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
  soit $-3 \leq f(x) \leq -\dfrac{3}{2} < 0$
  Ainsi f est strictement négative sur $[0;1]$, et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0;1]$.
- Sur $[2;+\infty[$:
  Si $x \geq 2$ alors $f(x) \geq f(2)$ car f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
  soit $f(x) \geq \dfrac{5}{3} > 0$
  Ainsi f est strictement positive sur $[0;1]$, et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[2;+\infty[$.

L'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[0;+\infty[$; et de plus $1 < \alpha < 2$.

2. On considère l'algorithme suivant :

- **Entrée** : Introduire un nombre entier naturel n
- **Initialisation** :
  Affecter à a la valeur 1
  Affecter à b la valeur 2
- **Traitement** : Tant que $b-a>10^{-n}$
  Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Affecter à p le produit $f(a)\times f(m)$
  Si $p>0$, affecter à a la valeur m
  Sinon affecter à b la valeur m
  fin du si
  fin tant que
- **Sortie** :
  Afficher a
  Afficher b
- **Fin de l' algorithme**

On a fait fonctionner cet algorithme pour $n=1$. Compléter le tableau donnant les différentes étapes.

	m (valeur exacte)	p arrondi à 10^{-3} près	a (valeur exacte)	b (valeur exacte)	$b-a$ (valeur exacte)
Initialisation			1	2	1
Etape 1	$\frac{3}{2}$	0.225	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
Etape 2	$\frac{7}{4}$	-0.105	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$
Etape 3	$\frac{13}{8}$	-0.039	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{8}$
Etape 4	$\frac{25}{16}$	-0.008	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{1}{16}$

a) Expliquer ce que fait l'algorithme précédent.
Cet algorithme permet d'encadrer l'unique solution de l'équation $f(x)=0$par dichotomie. Quelle influence le nombre entier n, introduit au début de l'algorithme, a-t-il sur les nombres a et b obtenus ?
Le nombre entier n permet de demander à l'utilisateur la précision de l'encadrement souhaité ou de l'approximation souhaité, ici 10^{-n}.

b) (*Travail non évaluable*) On note α la solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[1;2]$
Programmer l'algorithme précédent à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice afin d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-8}.
Sous XCAS :

```
dichotomie(n):=
{local a,b,m,p;
a:=1;
b:=2;
 while ( b-a>10^(-n))
{m:=(a+b)/2;
p:=f(a)*f(m);
 if p > 0 then a:=m; else b:=m; end_if;
}
return evalf(a,n);};
```

Son utilisation :

```
dichotomie(4);
```

renvoie :

1,5468

Remarque :

```
fsolve(f(x)=0,x=1..2,bissection);
```

renvoie :

$$1.54681827688$$