Exercice I 1

1. Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité de longueur 2 cm). On considère C_f, la représentation graphique de la fonction numérique f définie définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles. La représentation graphique de la courbe C_f est donnée ci-dessus :

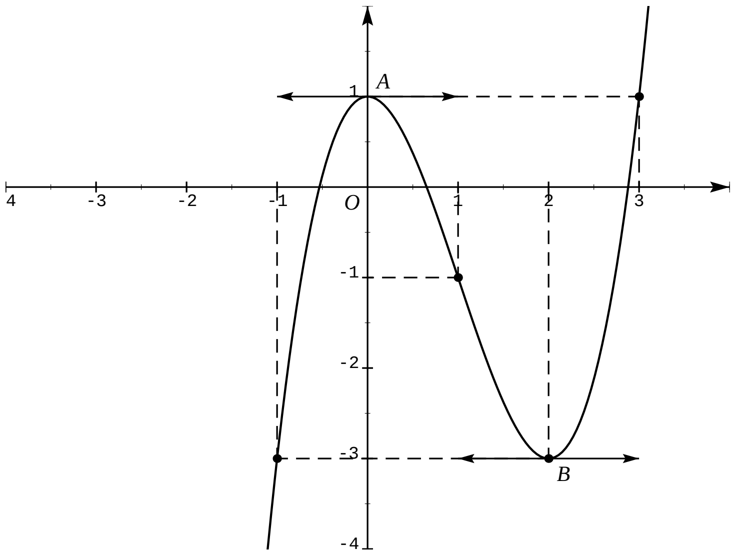


FIGURE 1 – 1

On précise qu'aux points A et B, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. A l'aide du graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

- Comme $A(0,1) \in C_f$ on déduit $f(0) = 1$.
- Comme $B(1,-1) \in C_f$ on déduit $f(1) = -1$.
- La tangente à C_f aux points d'abscisses 0 et 2 est horizontale, donc $f'(0) = f'(2) = 0$.

3. Déterminer les valeurs des constantes a, b, c et d.

- $f(0) = 1 \Leftrightarrow a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 1 \Leftrightarrow d = 1$
- $f(1) = -1 \Leftrightarrow a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = -1 \Leftrightarrow a + b + c + d = -1 \Leftrightarrow a + b + c = -2$
- Comme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; on déduit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,
  $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$
  $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3a \times 2^2 + 2b \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow 12a + 4b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} a + b &= -2 \\ 3a + b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= -2 \\ -3a - b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -3 \end{cases}$$

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

5. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Autrement dit calculer la dérivée $g'(x)$, étudier le signe de cette dérivée, puis établir le tableau de variations de $g(x)$.)

- Dérivée : $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$$\boxed{g'(x) = 3x(x-2)}$$

- Signe de la dérivée : la dérivée est ici un trinôme du second degré, on calcule ses racines (éventuelles)
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
Règle du produit nul.
$g'(x)$ étant un trinôme du second degré, il a donc le signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur d'où le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\Delta > 0$ Le signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

ici

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

6. On admet que la représentation graphique donnée ci-avant est celle de C_g, la courbe représentative de la fonction g.

7. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1,2]$.
On a $g(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$$\boxed{g(1) = 0}$$

Comme

$$g(1) = -1$$

et comme g est strictement décroissante sur $[1;2]$, on déduit :
Si $1 \leq x \leq 2$ alors $g(1) \geq g(x) \geq g(2)$, soit $-3 \leq g(x) \leq -1$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est négative sur } [1;2]}$$

8. La tangente T à C_g au point d'abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.

- $g'(1) = 3 - 6 = -3$
- $g(1) = -1$
- on remplace T : $y = -3(x-1) - 1$

$$\boxed{T : y = -3x + 2}$$

9. Etudier la position relative de la tangente T par rapport à C_g .
On forme $y_{C_g} - y_T$ et on étudie son signe :
$y_{C_g} - y_T = g(x) - (3x-3) = x^3 - 3x^2 + 1 + 3x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$
Or $(x-1)^3 = (x-1)^2 \times (x-1)$
Ainsi, comme le carré d'un réel est toujours positif, $y_{C_g} - y_T$ a le signe de $x - 1$.
D'où le tableau de signes ci- dessous :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$y_{C_g} - y_T$	$-$ 0 $+$

Conclusion :

- C_g et T on un seul point commun $A(1;-1)$
- Sur $]-\infty;1[$, on a $y_{C_g} - y_T < 0$, la courbe C_g est située en dessous de T sur $]-\infty;1[$
- Sur $]1;+\infty[$, on a $y_{C_g} - y_T > 0$, la courbe C_g est située au dessus de T sur $]1;+\infty[$.

Exercice I 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 13x - 7}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1cm en abscisses et 0,5cm en ordonnées. Partie A : Etude des variations sur l'intervalle [-5 ; 9].

1. a) La fonction f est-elle définie sur tout l'intervalle [-5 ; 9] ?

Non, $f(x)$ existe ssi $x+1 \neq 0$ c'est à dire si $x \neq -1$.

$$\boxed{D_f = [-5;-1[\cup]-1;9]}$$

b) Calculer $f(-5)$ et $f(9)$.

- $f(-5) = \dfrac{50+65-7}{-5+1} = \dfrac{108}{-4} = -27$
- $f(9) = \dfrac{162-117-7}{10} = \dfrac{19}{5}$

2. a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2}$.

$f = \dfrac{u}{v}$; donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Comme

$$\begin{cases} u(x) & = 2x^2 - 13x - 7 \\ v(x) & = x+1 \end{cases}$$

on déduit $\begin{cases} u'(x) & = 4x - 13 \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{(4x-13)(x+1) - 1(x^2 - 13x - 7)}{(x+1)^2} = \dfrac{4x^2 + 4x - 13x - 13 - 2x^2 + 13x + 7}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$

$$\boxed{\text{Soit } f'(x) = \dfrac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2}}$$

b) Déterminer les coordonnées des points en lesquels C_f admet une tangente horizontale.

La tangente au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$, on cherche donc ici les réels x pour les $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$

On calcule $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16$

Ainsi l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

Deux points de C_f ont une tangente horizontale, ce sont les points $A(-3; f(-3))$ et $B(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(-3;-25)$, et $B(1;-9)$.

0.2cm

c) Dresser sur [-5 ; 9] le tableau de variations de f.

- Signe de la dérivée :
  Déjà le dénominateur est un carré, donc est toujours positif $f'(x)$ a donc le signe du trinôme du second degré x^2+2x-3, il a donc le signe de $a=1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur d'où le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-25	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	

- Tableau de variations de f :

Partie B : Etude graphiques sur l'intervalle]-1 ; 9] uniquement.

1. a) Etablir le tableau de signes de $f(x)$ sur]-1 ; 9].

Comme $f(x)=\dfrac{2x^2-13x-7}{x+1}$, est un quotient, on étudie successivement le signe du numérateur et du dénominateur.

- Signe de $2x^2-13x-7$, c'est un trinôme du second degré qui a pour racines $\alpha=7$ et $\beta=-\dfrac{1}{2}$, et $a=2\cdots$.
- Signe de $x+1$
  $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		7		$+\infty$
$2x^2-13x-7$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-13x-7}{x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On ne garde alors que le tableau sur $]-1;+9]$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		7		9
$2x^2-13x-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-13x-7}{x+1}$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Interpréter graphiquement ce tableau.

✎ $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=7$

La courbe C_f rencontre l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{2}$ et 7.

✎ $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]7;+9]$

La courbe C_f est située au dessus de l'axe des abscisses sur $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]7;9]$

✎ $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{1}{2};7\right[$

La courbe C_f est située en dessous de l'axe des abscisses sur $\left]-\dfrac{1}{2};7\right[$

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées et l'équation de la tangente à C_f en ce point.
La courbe C_f rencontre l'axe des ordonnées au point $C(0;-7)$.
La tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
Comme $f(0)=-7$ et $f'(0)=-6$

$$\boxed{T: y=-6x-7.}$$

3. Démontrer que la courbe C_f reste strictement au-dessus de la droite D d'équation $y=2x-15$ sur l'intervalle]-1 ; 9].
Méthode : On forme $y_{C_f}-y_D=f(x)-(2x-15)$ et on étudie son signe .

$$y_{C_f}-y_D=f(x)-(2x-15)=\frac{2x^2-13x-7}{x+1}-\frac{(2x-15)(x+1)}{x+1}=\frac{2x^2-13x-7-2x^2+13x+15}{x+1}=\frac{15}{x+1}$$

Or sur]-1 ; 9], on a $x>-1$, donc $x+1>0$ et 15 >0, donc $\dfrac{15}{x+1}>0$
Ainsi pour tout réel x de]-1 ;9] ; on a $y_{C_f}-y_D>0$; ce qui prouve que la courbe C_f reste strictement au-dessus de la droite D d'équation $y=2x-15$ sur l'intervalle]-1 ; 9].

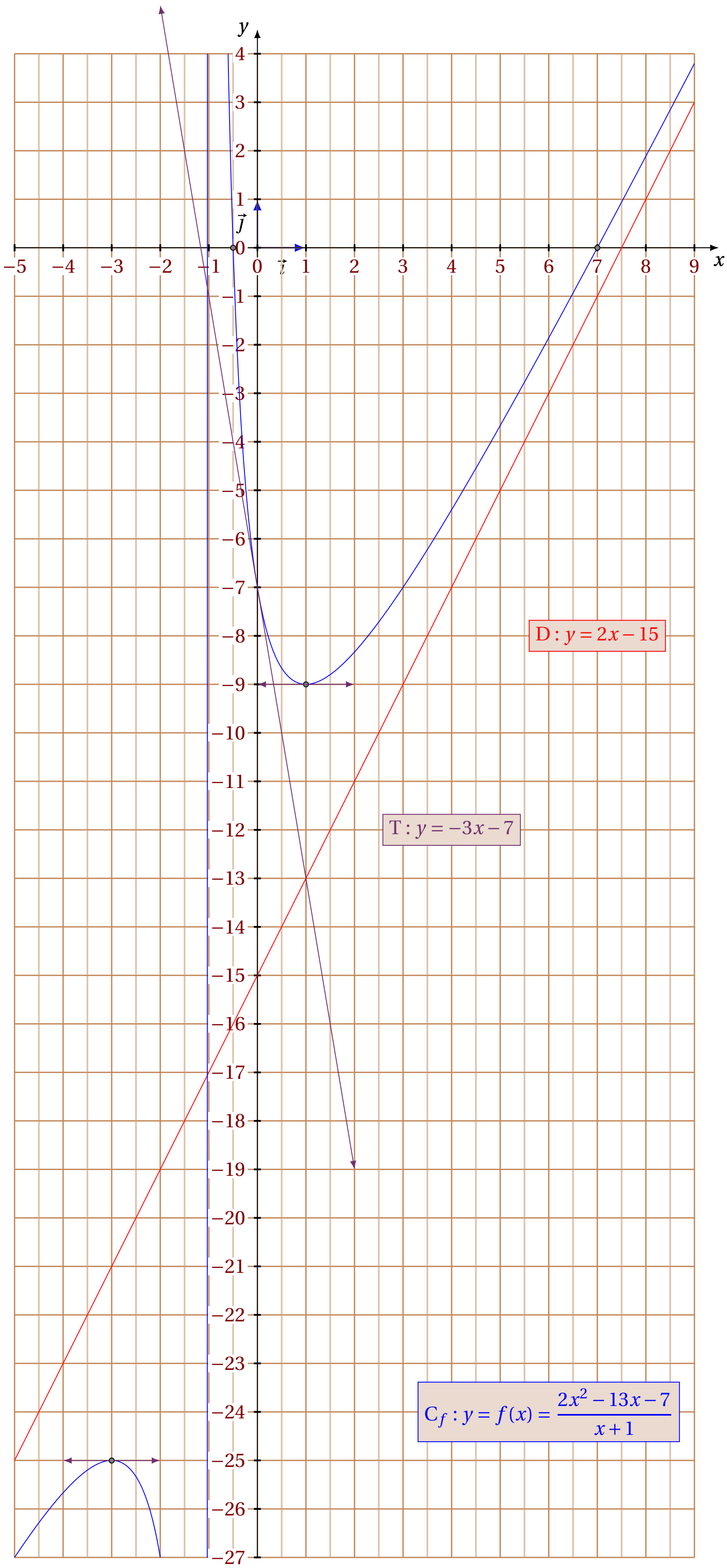
4. a) Donner une table de valeurs de $f(x)$ sur]-1 ; 0] avec un pas de 0,1

x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$f(x)$	63,2	23,4	10,3	3,8	0	-2,5	-4,2	-5,4	-6,3	-7

et sur [0 ; 9] avec un pas de 1 en arrondissant toutes les images au dixième près.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-7	-9	-8,3	-7	-5,4	-3,7	-1,9	0	1,9	3,8

b) Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, construire D, les tangentes puis C_f sur l'intervalle.


D : $y = 2x - 15$
T : $y = -3x - 7$
$C_f : y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 13x - 7}{x+1}$