DEVOIR EN TEMPS LIBRE N ° III : Fonctions, limites, dérivé TSTI 2d EE 2014

TEE Le corrigé

Un petit DM pour apprendre à rédiger ...

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-12x+36}{x^2-4}$ et C_f sa courbe représentative dans une repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

✍ En $+\infty$

> Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

✍ En $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

✍ En -2

On étudie le signe de x^2-4 sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

En -2^- : On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}(x^2-12x+36)=64\\ \lim\limits_{x\to-2^-}x^2-4=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$.

En -2^+ : On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+}(x^2-12x+36)=64\\ \lim\limits_{x\to-2^+}x^2-4=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$.

✍ En 2^- : On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-12x+36)=16\\ \lim\limits_{x\to2^-}x^2-4=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$.

En 2^+ : On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}(x^2-12x+36)=16\\ \lim\limits_{x\to2^+}x^2-4=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$.

2. En déduire des asymptotes possibles.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, donc la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{12x^2-80x+48}{(x^2-4)^2}$$

$f=\dfrac{u}{v}$ donc $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Comme $u(x)=x^2-12x+36$; on déduit $u'(x)=2x-12$

De même $v(x)=x^2-4$, et donc $v'(x)=2x$

On a alors $f'(x)=\dfrac{(2x-12)(x^2-4)-(2x)(x^2-12x+36)}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2x^3-8x-12x^2+48-2x^3+24x^2-72x}{(x^2-4)^2}$

On a bien $f'(x)=\dfrac{12x^2-80x+48}{(x^2-4)^2}=\dfrac{4(3x^2-20x+12)}{(x^2-4)^2}$

4. Etudier les variations de f sur son domaine de définition.
   On étudie le signe de la dérivée :
   - Le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif.
     La dérivée a donc le signe du numérateur.$3x^2 - 20x + 12$ a pour discriminant $\Delta = 400 - 4 \times 3 \times 12 = 256 = 16^2$
   - Le numérateur est un trinôme du second degré qui a pour racines 6 et $\frac{2}{3}$; il a donc le signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
signe de $3x^2 - 20x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -8$ et $f(6) = 0$

Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes (axe des abscisses et axe des ordonnées)

Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- $f'(0) = \dfrac{48}{16} = 3$
- $f(0) = \dfrac{361}{-4} = -9$

$$\boxed{\text{T a pour équation } y = 3x - 9}$$

Soit (d) la droite d'équation $y = 1$. Etudier la position relative de C_f par rapport à (d).

On forme $y_{C_f} - y_{(d)} = f(x) - 1 = \dfrac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 4} - 1 = \dfrac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 4} - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = \dfrac{-12x + 40}{x^2 - 4}$

$$y_{C_f} - y_{(d)} = \frac{4(-3x + 10)}{x^2 - 4}$$

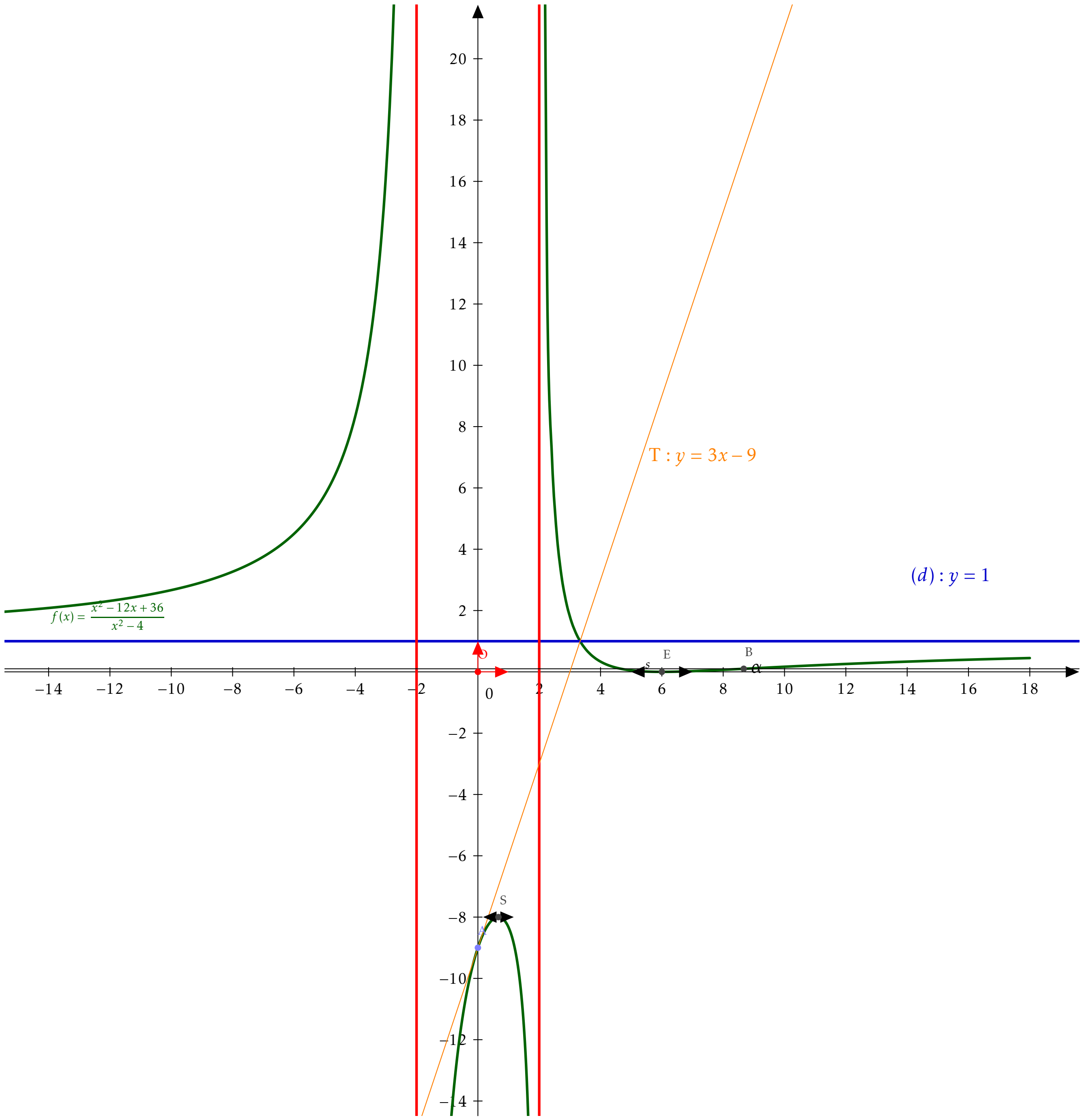
x	$-\infty$		-2		2		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
signe de $(-3x + 10)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
signe de $y_{C_f} - y_{(d)}$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

On interprète :

- C_f et (d) on un seul point d'intersection $B\left(\dfrac{10}{3}, 1\right)$
- Sur $]-\infty; -2[\cup]2; \dfrac{10}{3}[$, on a $y_{C_f} - y_{(d)} > 0$, la courbe C_f est donc située au dessus de (d) sur chacun de ces intervalles.
- Sur $]-2; 2[\cup]\dfrac{10}{3}; +\infty[$, on a $y_{C_f} - y_{(d)} < 0$, la courbe C_f est donc située en dessous de (d) sur chacun de ces intervalles.

Sur $[6;10]$, montrer que $f(x) = 0.1$ admet une unique solution α. On donnera un encadrement de α à 10^{-1}.
f est continue car dérivable sur $[6;10]$;
f est strictement croissante sur $[6;10]$
donc pour tout réel k compris entre $f(6) = 0$ et $f(10) = \frac{1}{6}$, l'équation $f(x) = k$ a une racine unique.
En particulier 0,1 est compris entre $f(6) = 0$ et $f(10) = \frac{1}{6}$, donc l'équation $f(x) = 0{,}1$ a une racine unique α.
Avec une calculatrice on obtient $f(8{,}6) \approx 0{,}096$ et $f(8{,}7) \approx 0{,}101$
et donc $f(8{,}6) < 0{,}1 < f(8{,}7)$, soit $f(8{,}6) < f(\alpha) < f(8{,}7)$

d'où $8{,}6 < \alpha < 8{,}7$


$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 4}$
$T : y = 3x - 9$
$(d) : y = 1$
E
B
S
A
α