Devoir en temps libre n° II : Suites, Algo, Fonction TSTI 2d EE 2014

TEE A rendre le mercredi 13 novembre 2013

Un petit DM pour apprendre à rédiger ...

Suite et algorithmique

Exercice 1 (*D'après sujet bac*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   $n = 0$ dans la relation $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$ donne $u_1 = 0{,}4u_0 + 3 = 0{,}4 \times 8 + 3 = 6{,}2$.
   $n = 1$ dans la relation $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$ donne $u_2 = 0{,}4u_1 + 3 = 0{,}4 \times 6{,}2 + 3 = 5{,}48$.

   $\boxed{u_1 = 6{,}2 \text{ et } u_2 = 5{,}48.}$

   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée ci-dessous.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,07681
7	5	5,03072
8	6	5,012288
9	7	5,0049152
10	8	5,00196608
11	9	5,00078643
12	10	5,00031457

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?

   On a saisi : =0,4*B2+3

3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
   Il semble que (u_n) converge vers 5.
   On conjecture donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE U − 5 > 0,01
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur 0,4U + 3
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

   Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ? L'entier N affiché fournit le rang à partir duquel $u_n - 5 \leq 0.01$
   Voici l'éxécution avec XCAS :

   $\boxed{1}$

```
precision :=proc(p)
  local N,U;
   N :=0;U :=8;

    tantque U-5>p faire
  N :=N+1;
  U :=0.4*U+3;
ftantque;

  return N;
```

```
end :
```

// Succès
// End defining precision

$$\text{Done} \tag{1}$$

$\boxed{2}$ `precision(0.01)`

$$7 \tag{2}$$

$\boxed{3}$ `precision(0.0001)`

$$12 \tag{3}$$

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0{,}4u_n + 3 - 5 = 0{,}4u_n - 2 = 0{,}4(u_n - 5) = 0{,}4v_n$$
   On a prouvé que pour tout entier n on a $v_{n+1} = 0{,}4v_n$, ce qui prouve que :
   la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 8 - 5 = 3$ de raison 0,4.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Comme (v_n) est une suite $v_n = q^n \times v_0$.
   $$v_n = 3 \times 0{,}4^n.$$
   c) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ? Pourquoi ?
   On a $v_n = uv_{n5}$, donc $u_n = v_n + 5$, ainsi $u_n = 5 + 3 \times 0{,}4^n$
   Comme $-1 < 0{,}4 < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$,
   $$\text{soit } \lim_{n\to+\infty} 5 + 3 \times 0{,}4^n = 5 \text{ c'est-à-dire } \lim_{n\to+\infty} u_n = 5$$

Une fonction

Exercice 2

Étude d'une courbe $\mathcal{C}_1$

$\mathcal{C}_1$ est la représentation graphique d'une fonction g, définie sur l'intervalle [5 ; 9], par

$$g(x) = -x^2 + bx + c$$

où b et c sont des réels à déterminer.

1. Écrire les conditions que doivent vérifier les réels b et c pour que la courbe $\mathcal{C}_1$ passe par les points A(5 ; 1) et B(9 ; 5).
   $A(5\,;\,1) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow g(5) = 1 \Leftrightarrow -25 + 5b + c = 1 \Leftrightarrow 5b + c = 26$
   $B(9\,;\,5) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow g(9) = 5 \Leftrightarrow -81 + 9b + c = 5 \Leftrightarrow 9b + c = 86$
2. Résoudre le système ainsi obtenu.
$$\left\{\begin{array}{lcl} 5b + c & = & 26 \\ 9b + c & = & 86 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4b & = & 60 \ \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ c & = & 26 - 5b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 15 \\ c & = & -49 \end{array}\right.$$
3. On a donc $g(x) = -x^2 + 15x - 49$.
   a) On désigne par g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$
   $g'(x) = -2x + 15$
   Signe de la dérivée
   $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$
   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 15 \Leftrightarrow x < \dfrac{15}{2}$
   On en déduit les variations de la fonction g sur l'intervalle [5 ; 9].

x	5		$\frac{15}{2}$		9
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	1	$\nearrow$	$\frac{29}{4}$	$\searrow$	5

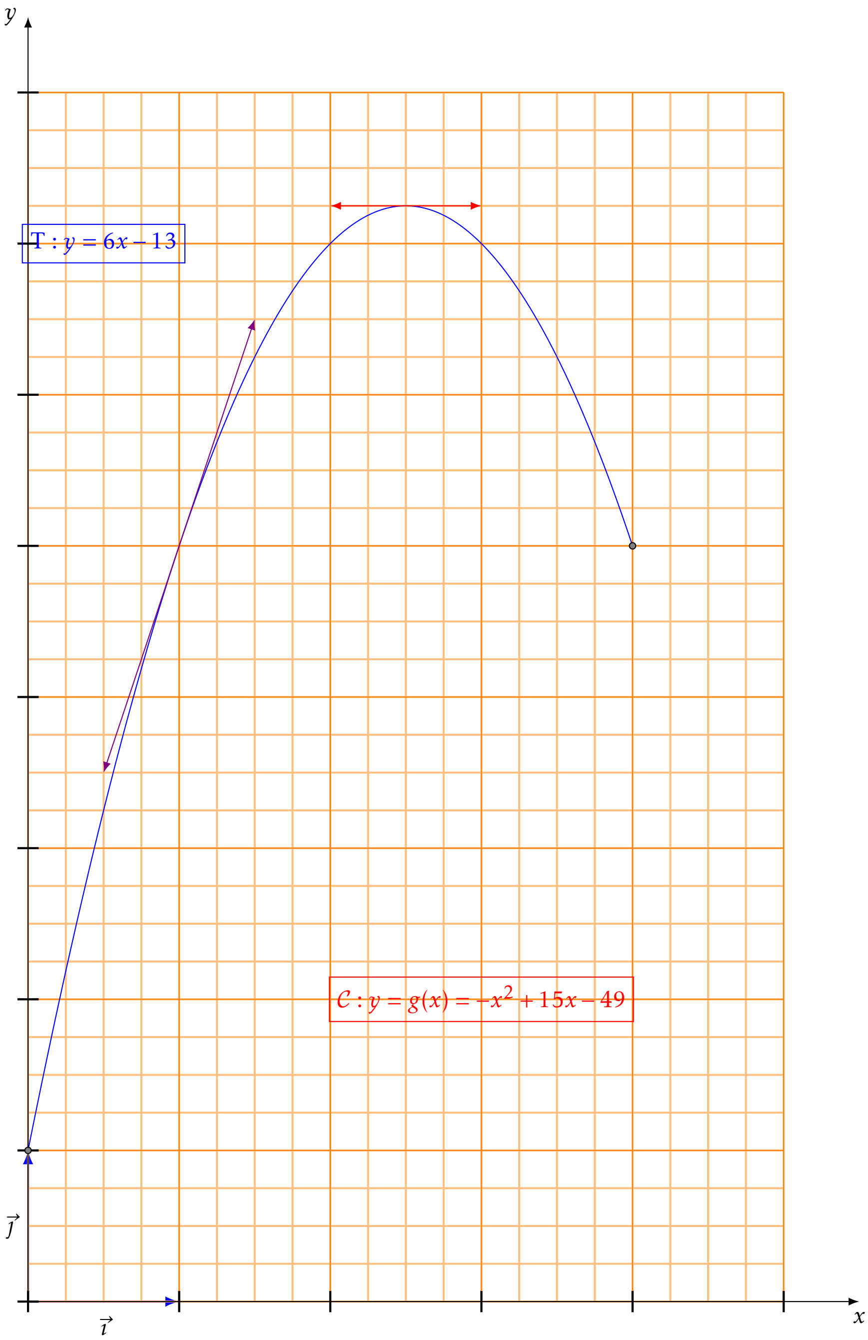
b) Déterminer pour quelle valeur de x la fonction g admet un maximum. En déduire les coordonnées du sommet C de la courbe $\mathcal{C}_1$.

D'après cette étude g présente un maximum en $\dfrac{15}{2}$ qui vaut $\dfrac{29}{4}$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 6.
(T) a pour équation $y = f'(6)(x-6) + f(6)$.
Comme $f'(6) = -2 \times 6 + 15 = 3$ et $f(6) = -36 + 90 - 49 = 5$

Donc (T) : $y = 3x - 13$

5. Tracer $\mathcal{C}_1$, (T) dans un repère avec des unités bien choisies.



y
x
$\text{T} : y = 6x - 13$
$\mathcal{C} : y = g(x) = -x^2 + 15x - 49$
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$