DEVOIR EN TEMPS LIBRE N ° I : Polynômes,Suites

TSTI 2d EE 2014

TEE Le corrigé

Un petit DM pour commencer ...

Polynôme

Exercice 1

On donne le polynôme : $P(x) = 8x^4 + 26x^3 - 7x^2 - 36x + 9$.

1. Déterminer des réels a,b et c tels que : $P(x) = (x^2 + ax - 3)(bx^2 + cx - 3)$.
   On développe $(x^2 + ax - 3)(bx^2 + cx - 3)$
   On obtient : $(x^2 + ax - 3)(bx^2 + cx - 3)$
   $= bx^4 + cx^3 - 3x^2 + abx^3 + acx^2 - 3ax - 3bx^2 - 3cx + 9$
   soit $P(x) = bx^4 + (c + ab)x^3 + (ac - 3 - 3b)x^2 + (-3a - 3c)x + 9$
   Comme $P(x) = 8x^4 + 26x^3 - 7x^2 - 36x + 9$, et comme deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients, il vient par identification :
   $$\begin{cases} b = 8 \\ c + ab = 26 \\ ac - 3 - 3b = -7 \\ -3a - 3c = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ c + 8a = 26 \\ ac - 3 - 24 = -7 \\ -3a - 3c = -36 \end{cases}$$
   On résout le système $\begin{cases} c + 8a = 26 \\ -3a - 3c = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 10 \end{cases}$
   Il reste à contrôler que la dernière relation est bien vérifiée.$ac = -27 \Leftrightarrow 2 \times 10 - 27 = -7$, ce qui est vrai !
   Conclusion
   $$\boxed{P(x) = (x^2 + 2x - 3)(8x^2 + 10x - 3)}$$

2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$. On utilise la factorisation obtenue dans la question précédente
   $$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(8x^2 + 10x - 3) = 0$$
   $$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3) = 0 \text{ ou } (8x^2 + 10x - 3) = 0$$
   <u>Résolution de $x^2 + 2x - 3 = 0$</u>
   $x_1 = 1$ est racine évidente, ainsi $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donne $1 \times x_2 = -3$ soit $x_2 = -3$
   <u>Résolution de $8x^2 + 10x - 3 = 0$</u>
   On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 8 \times (-3) = 196 = 14^2$
   Ayant $\Delta > 0$, l'équation a deux racines distinctes $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 14}{16} = \frac{1}{4}$
   $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 14}{16} = -\frac{3}{2}$
   Donc l'ensemble des solutions est
   $$\boxed{S = \{-3; -\frac{3}{2}; \frac{1}{4}; 1\}}$$

3. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$(x^2 + 2x - 3)$		+	0	−		−		−	0	+	
$(8x^2 + 10x - 3)$		+		+	0	−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } S =]-\infty; -3[\cup]-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}[\cup]1; +\infty[}$$

Suite

Exercice 2

La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydroélectrique de Xiangjaba à la ville de Shangaï. Elle mesure environ 1 900 km ; sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW ; le courant est transporté sous une tension de 800 kV.

Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0.3% pour une distance de 100 kilomètres.

Partie A :
On note $p_0 = 6\ 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note p_n la puissance électrique restant dans la ligne Xiangjaba -Shangaï au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi p_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.

1. Montrer que $p1 = 0.997 p_0$
   $p_1 = p_0 - 0{,}3\% p_0 = (1-0{,}003)p_0 = 0{,}997 p_0$
2. Quelle est la puissance électrique au MW près par défaut restant dans la ligne Xiangjaba-Shangaï au bout de 200 km ?
   On veut donc calculer $p_2 = p_1 - 0{,}3\% p_1 = 0{,}997 p_1 = 0{,}997{,}997 p_0 = 0{,}997^2 \times 6400 \approx 6361$

   La puissance électrique au MW près par défaut restant au bout de 200 km est 6361 MW.
3. Déterminer la nature de la suite (p_n) puis exprimer p_n en fonction de n.
   $p_{n+1} = p_n - 0{,}3\% p_n = (1-0{,}003)p_n = 0{,}997 p_n$.
   Comme pour tout entier n on a $p_{n+1} = 0{,}997 p_n$:

   la suite (p_n) est géométrique de premier terme $p_0 = 6400$ et de raison $q = 0{,}997$.

   D'après le cours $p_n = q^n \times p_0 = 0{,}997^n \times 6400$

   $p_n = 0{,}997^n \times 6400$

Partie B :
On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :
  n un entier naturel
  q un nombre réel
  p un nombre réel
Entrée :
  SAISIR n
Initialisation :
  Affecter à p la valeur 6400
  Affecter à q la valeur 0,997
Traitement :
  Répéter n fois
  Affecter à p la valeur $p \times q$
Sortie :
  Afficher p

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 3$.
   Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies à l'unité près par défaut).

	n	p	q
Entrées et initialisation	3	0,997	6400
1er passage dans la boucle de l'algorithme			6380
2e passage dans la boucle de l'algorithme			6361
3e passage dans la boucle de l'algorithme			6342

2. Interpréter la valeur de p obtenue au troisième passage dans la boucle de l'algorithme.
   On obtient $p_3 \approx 6342$.

   La puissance électrique au MW près par défaut restant au bout de 300 km est 6342 MW.
3. Quelle est le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km ?
   Le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km est environ $100 - \dfrac{6342}{64} \approx 0{,}9\%$