

1 *Exercice 1 : Probabilités 4 points*

Exercice 1

Une chocolaterie industrielle fabrique des tablettes de chocolat de 200 grammes. Une machine qui fabrique les tablettes est préréglée afin de respecter cette masse de 200 grammes.

Lors de la fabrication, toutes les tablettes de chocolat sont pesées et celles dont la masse est inférieure à 195 grammes sont rejetées. L'entreprise ne les commercialisera pas sous cette forme. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une tablette de chocolat prélevée au hasard dans la production, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart type 2,86. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1. a) Déterminer la probabilité de l'événement « $195 < Z < 205$ ».

`[2ND] [DISTR] [2] [NORMALCDF(] [195] [,] [205] [,] [200] [,] [2.86] [)] [EXE]`

$$\text{Normalcdf}(195,205,200,2.86) \approx 0,9196$$

$$P(195 < Z < 205) \approx 0,9196 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

- b) Déterminer la probabilité qu'une tablette de chocolat prise au hasard dans la production ne soit pas rejetée après pesée.

On veut calculer $P(Z \leq 205) = \text{NormalFrép}(-10^{99}, 195, 200, 2.86) \approx 0,1518$

$$P(Z \geq 195) \approx 0,959810^{-4} \text{ près.}$$

Remarque

- *NormalFrép*(pour les calculatrices TI en français
- *Normalcdf*(pour les calculatrices TI en anglais

2. Une étude statistique a établi que, si la machine est bien réglée, la proportion de tablettes de chocolat rejetées est de 4 %. Afin de vérifier le réglage de la machine, le responsable qualité prélève de manière aléatoire un échantillon de 150 tablettes et observe que 10 tablettes sont rejetées.

Cette observation remet-elle en cause le réglage de la machine ? (On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.)

Remarque : l'énoncé ne sous-entend pas que la taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise et donc le tirage de l'échantillon puisse se faire dans les conditions d'application d'une loi binomiale... il faudrait toujours le préciser.

Ici $p = 0,04, n = 150$, donc on a bien $n \geq 30, np = 6 \geq 5, n(1-p) = 144 \geq 5$; ainsi les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique sont respectées. L'intervalle

$$I_n = \left[p - 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}}; p + 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \right] = \left[0,04 - 1,96 \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{150}}; 0,04 + 1,96 \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{150}} \right] \approx [0,0086; 0,0714]$$

de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est donc environ

$$[0,0086; 0,0714].$$

Sur 150 tablettes, 10 sont non conformes, soit une fréquence de $\frac{10}{150} \approx 0,0667$:

cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation de fluctuation asymptotique au seuil de 95%. La machine est bien réglée.

2 Exercice 2 : QCM sur les nombres complexes 4 points

Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

On considère les deux nombres complexes $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

1. La forme algébrique de z est égale à :

- a. $z = -1 + i\sqrt{3}$ b. ~~c. $z = 1 + i\sqrt{3}$~~ c. ~~c. $z = 2 + i\sqrt{3}$~~ d. ~~d. $z = \sqrt{3} - i$~~
- $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

2. Le nombre complexe z' est le nombre complexe :

- a. ~~opposé de z~~ b. ~~inverse de z~~ c. **conjugué de z** d. ~~opposé du conjugué de z~~
- car $re^{i\theta} = re^{-i\theta}$

3. Le nombre complexe $z \times z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3}} = 4e^0 = 4$:

- a. **est un nombre réel** b. ~~est un nombre imaginaire pur~~
- c. ~~a pour module 2~~ d. ~~est un nombre complexe dont un argument est $\frac{4\pi}{3}$~~

$z \times z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3}} = 4e^0 = 4.$

4. Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = i$ est :

- a. ~~$\frac{\pi}{3}$~~ b. ~~$\frac{5\pi}{6}$~~ c. ~~$\frac{\pi}{6}$~~ d. **$-\frac{\pi}{6}$**

En prenant les arguments de part et d'autre, il vient :

$arg(z \times z'') = arg(i) \quad (1)$

$arg(z) + arg(z'') = \frac{\pi}{2}$

Or $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ d'où on déduit $arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

$(1) \iff \frac{2\pi}{3} + arg(z'') = \frac{\pi}{2} \iff arg(z'') = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$

3 Exercice 3 : Equations différentielles 6 points

Exercice 3

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t est exprimé en heures. Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. A l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5°C , sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24°C .

Partie A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.

On calcule $f(0,5) = 35e^{-1,6 \times 0,5} - 30 = 35e^{-0,8} - 30 \approx -14,3$

La température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes sera d'environ -14°C

2. Étudier le sens de variation de la fonction f .

On calcule la dérivée et on étudie son signe :

$f'(t) = 35 \times (-1,6)e^{-1,6t} = -56e^{-1,6t}$

On a utilisé la formule de dérivation :

$(e^u)' = u'e^u$

Signe de la dérivée : La fonction exponentielle étant strictement positive sur \mathbb{R} on déduit que pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $f'(t) > 0$

La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?

$$f(1,5) \approx -26,8^\circ \text{C}$$

La température des ailerons sera conforme au cahier des charges car inférieure ou égale à -24°C

4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

$$\begin{aligned} f(t) = -24 &\iff 35e^{-1,6t} - 30 = -24 \\ &\iff 35e^{-1,6t} = 6 \\ &\iff e^{-1,6t} = \frac{6}{35} \\ &\iff -1,6t = \ln\left(\frac{6}{35}\right) \quad \text{en appliquant la fonction ln} \\ &\iff t = \frac{\ln\left(\frac{6}{35}\right)}{-1,6} \\ &\iff t \approx 1,10h \end{aligned}$$

La température des ailerons atteindra -24°C et sera donc conforme au cahier des charges au bout de 1h et 6 minutes et 9 secondes.

Partie B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation. La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.

L'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$ se met sous la forme $y' = 1,5y - 52,5$.

Elle est du type $y' = ay + b$ où $a = -1,5$ et $b = -52,5$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur \mathbb{R}

par $g(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, soit ici

$$g(t) = Ce^{-1,5t} - 35 \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle quelconque.}$$

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$g(t) = Ce^{-1,5t} - 35 \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle quelconque.}$$

2. a) Justifier que $g(0) = 5$. $g(0) = 5$ car l'instant $t = 0$, les ailerons, sont à une température de 5°C .
b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$

$$g(0) = 5 \iff Ce^{-1,5 \times 0} - 35 = 5$$

$$g(0) = 5 \iff Ce^0 - 35 = 5$$

$$C = 40$$

La fonction g est définie par $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$

3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

On résout $g(t) = -24$

$$\begin{aligned} g(t) = -24 &\iff 40e^{-1,5t} - 35 = -24 \\ &\iff 40e^{-1,5t} = 11 \\ &\iff e^{-1,5t} = \frac{11}{40} \\ &\iff -1,5t = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \quad \text{en appliquant la fonction ln} \\ &\iff t = \frac{\ln\left(\frac{11}{40}\right)}{-1,5} \\ &\iff t \approx 0,86h \approx 52 \text{ min} \end{aligned}$$

Ce nouveau tunnel permet une congélation plus rapide.

4 Exercice 4 : Suites 6 points

Exercice 4

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

Document 1 :

Catégorie	Vitesse des vents en km.h ⁻¹	Dégâts occasionnés
F0	60 à 120	Dégâts légers : dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres,...
F1	120 à 180	Dégâts modérés : automobiles renversées, arbres déracinés,...
F2	180 à 250	Dégâts importants : toits arrachés, hangars et dépendances démolis,...
F3	250 à 330	Dégâts considérables : murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues,...
F4	330 à 420	Dégâts dévastateurs : murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles,...
F5	420 à 510	Dégâts incroyables : maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments,...

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci-dessous.

Document 2 :

A partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante : « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes ».

On appelle « durée de vie » d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h⁻¹.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420 km.h⁻¹.

L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10 km.h⁻¹.

1. a) Cinq minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents est de 378 km.h⁻¹. Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
A quelle catégorie appartient la tornade à ce moment là ?

$$v = 420 - 10\% = 0,9 \times 420 = 378$$

Ainsi cinq minutes après la mesure initiale,

la vitesse des vents est de 378 km.h⁻¹ et donc la tornade est de catégorie F4.

Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».

- Après 5 minutes la vitesse de la tornade est $v_1 = 0,9 \times v_0 = 0,9 \times 420 = 378$
- Après 10 minutes la vitesse de la tornade est $v_2 = 0,9 \times v_1 = 0,9 \times 378 \approx 340$
- Après 15 minutes la vitesse de la tornade est $v_3 = 0,9 \times v_2 \approx 0,9 \times 340 \approx 306$

Ainsi quinze minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents

est environ de 306 km.h⁻¹ et donc la tornade est de catégorie F3 et occasionne des « dégâts considérables ».

2. Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q . Il commence à élaborer l'algorithme ci-dessous.

- a) Justifier la valeur 0,9 dans la phrase « Affecter à q la valeur 0,9 ».

D'après l'énoncé des météorologues ont admis la règle suivante : « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10% toutes les 5 minutes ».

Comme diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$, ici pour diminuer la vitesse de

10 % on multiplie sa valeur par $1 - \frac{10}{100} = 0,9$

- b) Donner le premier terme et la raison de la suite géométrique proposée par l'étudiant. Le premier terme est la valeur initiale de v soit $v_0 = 420$, sa raison est $q = 0,9$.

- c) Dans l'algorithme ci-dessus, des pointillés indiquent des parties manquantes. Recopier la partie relative au traitement et la compléter pour que l'étudiant puisse déterminer la durée de vie de cette tornade.

Variables :	n : un nombre entier naturel v : un nombre réel q : un nombre réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à v la valeur 420 Affecter à q la valeur 0,9
Traitement :	Tant que $v > 120$ Affecter à v la valeur $0,9 \times v$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher $5 \times n$

- d) Expliquer l'instruction « Afficher $5 \times n$ » proposée par l'étudiant. « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes », ainsi l'instruction « Afficher $5 \times n$ » proposée par l'étudiant donne le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}

L'instruction « Afficher $5 \times n$ » donne la durée de vie en minutes de la tornade.

3. Déterminer la durée de vie de cette tornade au sens défini dans le document 2. Notons v_n la vitesse de la tornade après $5 \times n$, la suite (v_n) est géométrique, donc $v_n = q^n \times v_0 = 420 \times 0,9^n$
On résout $v_n > 120$

$$\begin{aligned}
 v_n > 120 &\iff 420 \times 0,9^n > 120 \\
 &\iff 0,9^n > \frac{120}{420} \\
 &\iff 0,9^n > \frac{2}{7} \\
 &\iff \ln(0,9^n) > \ln\left(\frac{2}{7}\right) \quad \text{en appliquant la fonction } \ln \text{ strictement croissante sur }]0; +\infty[\\
 &\iff n \ln(0,9) > \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\
 &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} \quad \text{en divisant par } \ln(0,9) > 0
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} \approx 11,89$, donc $n \geq 12$

La durée de vie de la tornade est de $5 \times 12 = 60$ min soit une heure !