Lycée l'Oiselet **Lundi 24 février 2014**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE STI2D –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 4

Le candidat doit traiter les quatre exercices. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :
- *le nom de l'épreuve : épreuve de Mathématiques.*
- ***votre spécialité** : ITEC ou EE.*
- *votre classe : Terminale ITEC1 ou Terminale ITEC2 ou TEE*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

Une fonction ln *pour commencer ...*

Exercice 1

PARTIE A

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. f' désigne la fonction dérivée de f.

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(1;-1)$. T passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

1. *a*) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.

$$f(1) = -1$$

b) Déterminer $f'(1)$.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
On lit $f'(1) = -2$.
Si on note $A(1;-1)$ et $B(0;1)$. On a $m = f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1+1}{-1} = -2$

c) Donner une équation de T.
Une équation de T est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$; soit $y = -2(x-1) + (-1)$

$$\mathrm{T} : y = -2x + 1$$

2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$.
$f(x) = 2\ln x + a \times \dfrac{1}{x} + b$ ainsi $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + a \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2}$$

b) Déterminer alors les valeurs de a et b.
$f(1) = -1 \iff 2\ln 1 + a + b = -1 \iff a + b = -1$; en effet $\ln 1 = 0$.
$f'(1) = -2 \iff 2 - a = -2 \iff a = 4$
Comme $a = 4$, l'équation $a + b = -1$ nous donne $b = -5$

$$a = 4 \text{ et } b - 5 \text{ donne } f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - 5.$$

PARTIE B

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. *a*) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} - 5 = -5 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b) On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

2. *a*) Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.

$f = u + v$ où $u(x) = 2\ln x$ et $v(x) = \dfrac{4}{x} - 5$

Alors $f' = u' + v'$, et donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-4}{x^2}$.

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}.}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Sur $]0;+\infty[$, x^2 est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif, ainsi $f'(x)$ a le signe de $2x - 4$

- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$
- $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x - 4 > 0 \Longleftrightarrow 2x > 4 \Longleftrightarrow x > 2$

3. Établir le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	↘	$2\ln 2 - 3$	↗	$+\infty$

$$f(2) = 2\ln 2 + 2 - 5 = 2\ln 2 - 3$$

4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

- Sur $]0;2[$; on a le tableau de variation :

x	$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	
Variations de f	$3 - 2\ln 2$	↘	$2\ln 2 - 3$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \dfrac{4}{\frac{1}{2}} - 5 = -2\ln 2 + 3$$

- f est continue sur $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$;
- f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$;
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 + 3 \approx 1{,}6$ et $f(2) = 2\ln 2 - 3 \approx -1{,}6$, ayant 0 compris entre $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(2)$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

- Sur $]2;+\infty[$; on a le tableau de variation :

x	2	10
$f'(x)$	$+$	
Variations de f	$2\ln 2-3$ $\nearrow$	$2\ln 10-\frac{23}{5}$

$$f(10)=2\ln(10)+\frac{4}{10}-5=2\ln 10+\frac{23}{5}$$

- f est continue sur $[2;10]$;
- f est strictement croissante sur $[2;10]$;
- $f(2)=2\ln 2-3\approx -1{,}6$ et $f(10\approx 0{,}005$, ayant 0 compris entre $f(2)$ et $f(10)$, l'équation $f(x)=0$ a une solution unique β dans $[2;10]$.

5. *a*) Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1;3]$.
   - f est strictement décroissante sur $[1;2]$; donc si $1\le x\le 2$ alors $f(1)\ge f(x)\ge f(2)$ soit $-1\ge f(x)\ge 2\ln 2-3$ ainsi $f(x)<0$ sur $[1;2]$.
   - f est strictement croissante sur $[2;3]$; donc si $2\le x\le 3$ alors $f(2)\le f(x)\le f(3)$ soit $2\ln 2-3\le f(x)\le 2\ln 3-\frac{11}{3}<-1{,}4$
   ainsi $f(x)<0$ sur $[2;3]$.

   Ainsi f est négative sur $[1;3]$; on le voit très bien sur la figure !

   b) Montrer que la fonction F définie pour x appartenant à $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=(2x+4)\ln x-7x$ est une primitive de f.
   Il suffit de montrer que $\mathrm{F}'(x)=f(x)$
   Or $\mathrm{F}(x)=(2x+4)\ln x-7x$; on a ainsi $\mathrm{F}=a+b$ où $a(x)=(2x+4)\ln x$ et $b(x)=-7x$,
   avec $a=u\times v$ où $(x)=(2x+4)$ et $v(x)=\ln x$
   On a donc $a'(x)=2$, et $b'(x)=\frac{1}{x}$,
   $u'=a'b+b'a$, et donc $a'(x)=2\times+(2x+4)\times\frac{1}{x}=2+2+\frac{4}{x}$
   Comme $b(x)=-7x$, on a $b'(x)=-7$ et donc $\mathrm{F}'(x)=a'(x)+b'(x)=2+2+\frac{4}{x}-7=2+\frac{4}{x}-5=f(x)$.

   Comme $\mathrm{F}'(x)=f(x)$, on a montré que F est une primitive de f.

   Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$ en unités d'aires.On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}$.
   Comme la fonction f est continue et négative sur $[1;3]$, l'aire du domaine défini par $\begin{cases} 1\le x & \le & 3\\ f(x)\le y & \le= & 0\end{cases}$

   $vaut$A=$\displaystyle\int_1^3 (0-f(x))\,dx$

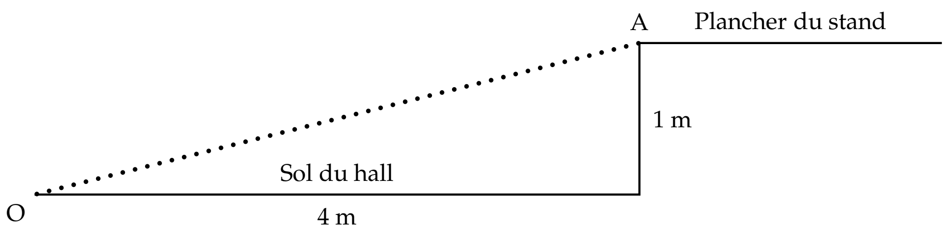
   Ainsi $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^3 -f(x)\,dx=[-\mathrm{F}(x)]_1^3=-(\mathrm{F}(3)-\mathrm{F}(1))=\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(3)$
   $\mathrm{F}(1)=6\ln 1-7=-7$ et $\mathrm{F}(3)=10\ln 3-21$, $\mathcal{A}=-7-(10\ln 3-21)=14-10\ln 3$

   $\mathcal{A}=14-10\ln 3 u.a.\approx 3{,}01 cm^2$

Un calcul d'aire ...

Exercice 2

Pour la construction d'un stand d'exposition, des élèves de TSTI2D ont besoin de créer une rampe d'accès reliant le plancher du stand au sol du hall d'exposition. Une rampe plane ne pouvant permettre l'accès aux fauteuils roulants, les élèves de BTS proposent comme solution de remplacer sur la coupe ci-dessous, le segment [OA] par la courbe $\mathcal{C}$ qui fait l'objet du problème suivant.



On choisit le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ dans lequel le point A a pour coordonnées (4 ; 1) et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie que l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{1}{32}\left(-x^3+6x^2\right).$$

1. Vérifier que O et A sont bien sur la courbe $\mathcal{C}$.
   $O \in \mathcal{C} \iff f(0)=0$; or $f(0)=\frac{1}{32}\left(-0^3+6\times 0^2\right)=0$ donc $O\in\mathcal{C}$.
   A de coordonnées (4 ; 1) appartient à $\mathcal{C} \iff f(4)=1$; or $f(4)=\frac{1}{32}\left(-4^3+6\times 4^2\right)=\frac{1}{32}(-64+6\times 16)=\frac{32}{32}=1$, donc A $\in\mathcal{C}$.
2. *a*) Calculer la fonction dérivée f' de f. Montrer que $f'(x)=\frac{-3}{32}x(x-4)$.
   On a facilement $f'(x)=\frac{1}{32}\left(-3x^2+12x\right)=\frac{1}{32}\left(-3x^2+12x\right)=\frac{1}{32}(-3x(x-4))=\frac{-3}{32}x(x-4)$

   b) étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 4]. Donner ensuite le tableau de variations de f sur [0 ; 4].

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de $-\frac{3}{32}$		$-$		$-$		$-$	
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc :

- $f'(x)=0 \iff x=0$ ou $x=4$
- $f'(x)>0$ sur $]0;4[$.

On déduit le tableau de variations de f sur [0 ; 4].

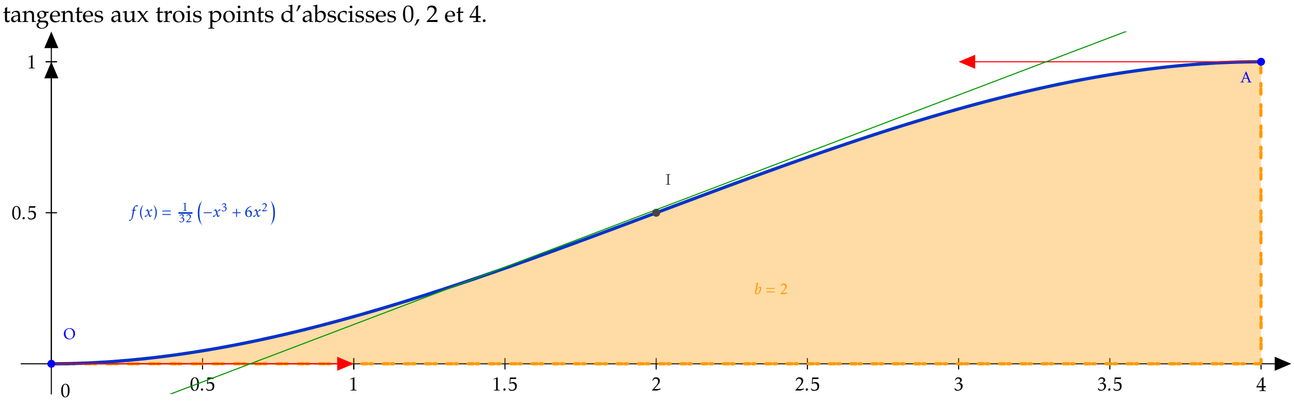
x	0		4
$f'(x)$	0	$+$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	1

3. *a*) Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.
$f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$, ceci signifie que la tangente à $\mathcal{C}$ aux points O et A est horizontale.
   b) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse 2 ?
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse 2 est $f'(2) = \frac{-3}{32} \times 2 \times (2-4) = \frac{4\times 3}{4\times 8} = \frac{3}{8}$

4. *a*) Recopier et compléter le tableau suivant : (on arrondira les valeurs au centième).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	0,04	0,16	0,32	0,50	0,68	0,84	0,96	1

   b) On prendra comme unité graphique 5 cm. Représenter sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux trois points d'abscisses 0, 2 et 4.



5. *a*) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4].
$f(x) = \frac{1}{32}\left(-x^3+6x^2\right)$, ainsi on a sans difficulté $F(x = \frac{1}{32}\left(-\frac{x^4}{4} + 6 \times \frac{x^3}{3}\right)$

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x = \frac{1}{32}\left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3\right) = \frac{1}{128}\left(-x^4+8x^3\right)$

   b) On note $\mathcal{S}$ la partie située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$.

Calculer l'aire de $\mathcal{S}$ (en unités d'aires).
f est continue et positive sur $[0;4]$,donc l'aire de $\mathcal{S}$ vaut :
$\mathcal{A} = \int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$;
Or $F(x) = \frac{1}{128}\left(-x^4+8x^3\right)$; donc $F(4) = \frac{1}{128}\left(-4^4+84^3\right) == \frac{1}{128}(-256+512) = 2$
$F(0) = 0$;$\mathcal{A} = 2 - 0 = 2$.

$\mathcal{A} = 2$ u.a.

   c) On précise qu'une unité d'aire sur le graphique correspond à 1 m^2 en réalité. Sachant que le stand a une largeur de 4 m, quel volume de béton devra-t-on utiliser pour construire la rampe d'accès ? La formule donnant ce volume est $V = B \times h$ où V est le volume, B l'aire de la partie correspondant à la partie $\mathcal{S}$ du graphique et h la largeur du stand.
On a $B = 2$ u.a. $= 2\ m^2$ et $h = 4m$; donc $V = B \times h = 2 \times 4 = 8\ m^3$

$V = 8\ m^3$.

Les suites ...

Exercice 3

La désintégration du Thorium, corps radioactif, donne du Radium.
On désigne par U_0 le nombre d'atomes dans un échantillon de Thorium à l'instant $t = 0$, par U_1 le nombre d'atomes de Thorium un jour après, et, pour tout entier naturel n, par U_n le nombre d'atomes de Thorium jours après.
On sait que le nombre d'atomes de Thorium diminue de par 3,7% jour.

1. Exprimer U_1 en fonction de U_0, puis de façon générale U_{n+1} en fonction de U_n.
$U_1 = U_0 - 3{,}7\% \times U_0 = U_0(1 - 3{,}7\%) = U_0(1 - 0{,}037) = 0{,}963U_0$

$U_1 = 0{,}963U_0$

De la même façon on a
$U_{n+1} = U_n - 3{,}7\% \times U_n = U_n(1 - 3{,}7\%) = U_n(1 - 0{,}037) = 0{,}963U_n$

$$\boxed{U_{n+1} = 0{,}963U_n}$$

2. Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Justifier.
   Ayant pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 0{,}963U_n$; on passe d'un terme au suivant en multipliant par 0,963 :
   La suite (U_n) est donc géométrique de raison 0,963

3. Un échantillon contient 10^{20} atomes à l'instant $t = 0$.
   On a donc $U_0 = 10^{20}$.
   a) Justifier que $U_n = 10^{20} \times 0{,}963^n$,
   Comme la suite (U_n) est géométrique, on a $U_n = q^n \times U_0$, avec $q = 0{,}963$ et $U_0 = 10^{20}$
   Ainsi on a $U_n = 10^{20} \times 0{,}963^n$.

   b) Déterminer le nombre d'atomes de cet échantillon au bout de 2 ans._ Le nombre d'atomes de cet échantillon au bout de 2 ans est $U_{730} = 10^{20} \times 0{,}963^{730} \approx 111\,478\,111$

4. On désire connaître la demi-vie du Thorium, c'est-à-dire le nombre de jours au bout desquels le nombre d'atomes sera égal à la moitié de sa valeur initiale.
   a) Justifier que cela revient à résoudre l'équation $0{,}963^n = 0{,}5$
   On cherche le nombre de jours n tel que $U_n = \frac{1}{2}U_0$.
   $U_n = \frac{1}{2}U_0 \iff 10^{20} \times 0{,}963^n = \frac{1}{2}10^{20} \iff 0{,}963^n = 0{,}5$
   b) Résoudre cette équation par le calcul et en déduire la demi-vie du Thorium à 1 jour près.
   $0{,}963^n = 0{,}5 \iff \ln(0{,}963^n) = \ln(0{,}5) \iff n\ln(0{,}963) = \ln(0{,}5) \iff n = \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}963)}$
   Or $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}963)} \approx 18{,}38$
   ainsi la demi-vie du Thorium à 1 jour près est de 18 jours.

5. Enzo qui n'est pas très fort en calcul mais plus doué en programmation, préfère utiliser un algorithme pour déterminer la demi-vie du Thorium. Il a commencé à l'écrire mais réfléchit encore à certaines instructions. Aidez-le en complétant les pointillés pour que l'algorithme lui donne la valeur de la demi-vie du Thorium.

```
Variables
    U : un nombre réel
    k : un nombre entier naturel
Initialisation
    Affecter à k la valeur 0
    Affecter à U la valeur 10^20
Traitement
    Tant que U > 0,5 × 10^20
        Affecter à k la valeur k + 1
        Affecter à U la valeur 0,963 × U
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher La demi-vie du Thorium est de
    Afficher k
    Afficher jours
```

Les nombres complexes

Exercice 4

Q.C.M. Les réponses sont : 1/C 2/ B 3/C 4/ B

On considère les nombres complexes

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_B = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_C = -2 + 2i.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Q. C. M.
Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification
NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* 0,5 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A z_B$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

   Le nombre $Z_1 = z_A \times z_B = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \times 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 16 \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 16e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 16e^{-i\frac{\pi}{2}} = 16\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -16i$.

   Z_1 est un nombre imaginaire pur.

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

   Le nombre $Z_2 = z_A^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 4^6 \times \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 4^6 \times e^{i\pi} = 4096[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -4096$

   Z_2 est un nombre réel négatif.

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

   Réponse A : $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$
   Réponse B : $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$
   Réponse C : $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   Réponse D : $\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

   Le nombre complexe conjugué de z_A est $\overline{z_A} = \overline{4e^{i\frac{\pi}{6}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

   $\overline{z_A} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

   Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
   Réponse B : $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   Réponse C : $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
   Réponse D : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

   Le nombre $z_C = -2 + 2i$ a pour module $|z_C| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   et pour argument un nombre réel θ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \frac{a}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) & = & \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

   donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient.

   On a donc $z_C = \left[2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

   Remarque : on a aussi $z_C = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

Partie II
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   a) Interpréter géométriquement $|z - z_A|$.
   $|z - z_A| = |z_M - z_A| = AM$
   b) Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z - z_A| = |z - z_B|$.
   $M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$
   $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points équidistants de A et B.

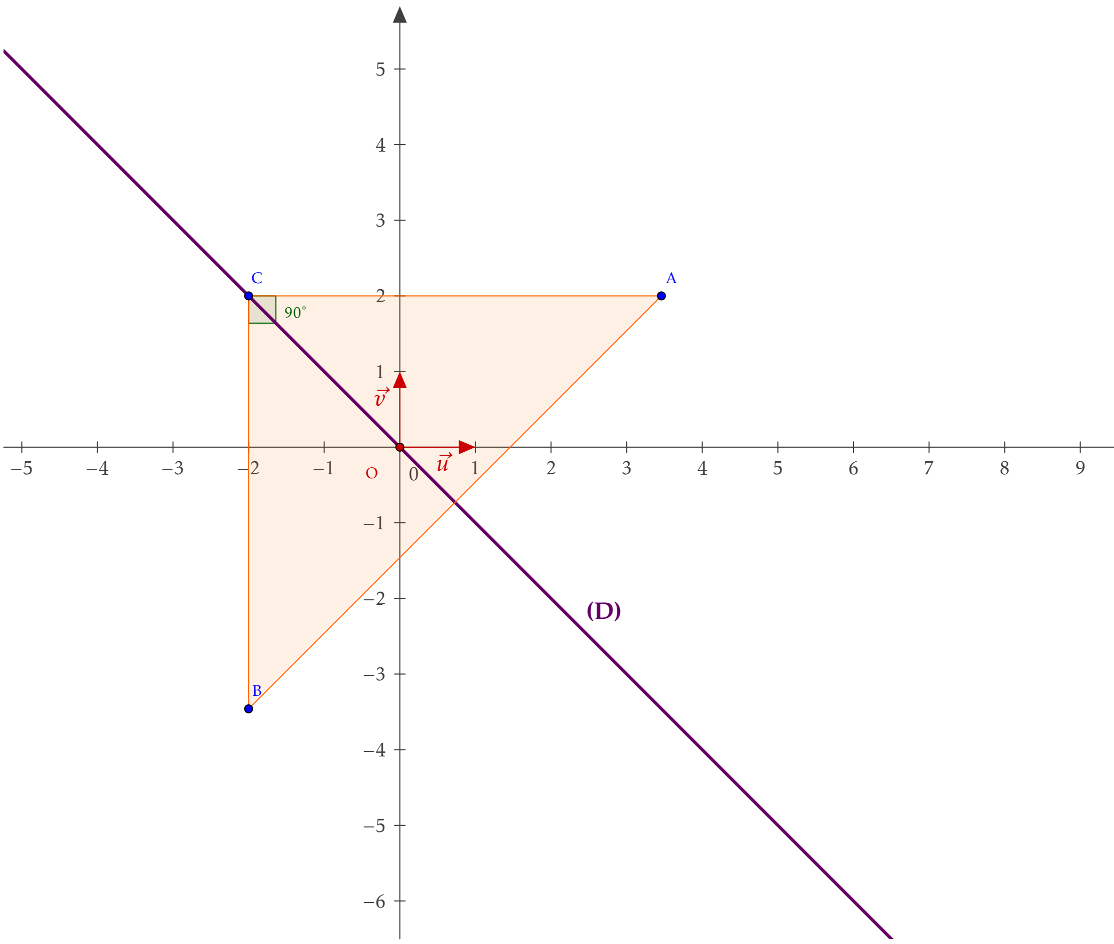
   $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment [AB].

c) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$.
$C \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$.
$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$.
Ainsi $z_C - z_A = -2 + 2i - \left(2\sqrt{3} + 2i\right) = -2 - 2\sqrt{3}$ et donc $|z_C - z_A| = |-2 - 2\sqrt{3}| = 2 + 2\sqrt{3}$.
De même $z_B = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4\left(-\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + i2\sqrt{3}$.
Ainsi $z_C - z_B = -2 + 2i - \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right) = 2i + 2i\sqrt{3} = i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$ et donc $|z_C - z_A| = \left|i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right| = 2 + 2\,sqrt3$.
Ayant prouvé $|z_C - z_A| = |z_C - z_B|$, on a bien établi que $C \in \mathcal{D}$

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
Utilisons la propriété réciproque de Pythagore :
Déjà $|z_C - z_A| = AC = 2 + \sqrt{3}$ et $|z_C - z_B| = BC = 2 + \sqrt{3}$.
Calculons $AB = |z_B - z_A|$
$z_B - z_A = -2 - 2i\sqrt{3} - \left(2\sqrt{3} + 2i\right) = -2 - 2\sqrt{3} + i\left(-2 - 2\sqrt{3}\right)$
Ainsi $AB^2 = \left(-2 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2 - 2\sqrt{3}\right)^2 = 2(2 + 2\sqrt{3})^2 = 2\left(4 + 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} + 12\right) = 2\left(16 + 8\sqrt{3}\right) = 32 + 16\sqrt{3}$
Comme $AC^2 + BC^2 = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 = 2\left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 = 32 + 16\sqrt{3}$
on a $AC^2 + BC^2 = AB^2$

3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.



Une figure (non demandée)