DEVOIR SURVEILLÉ N° X : Bac Blanc n° 1

TSTI2D Correction

Les fonctions pour commencer ...

Exercice 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;12]$, satisfaisant les conditions suivantes :
- $f(0)=3$, $f(12)=9$ $f'(0)=-1$ et $f'(12)=2$.
- Le minimum de la fonction f est 1.
- Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		12
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

1. *a*) Donner le tableau de variation de la fonction f. On fera figurer les images par f de 0, de 4 et de 12.
   Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée f' :

x	0		4		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	9

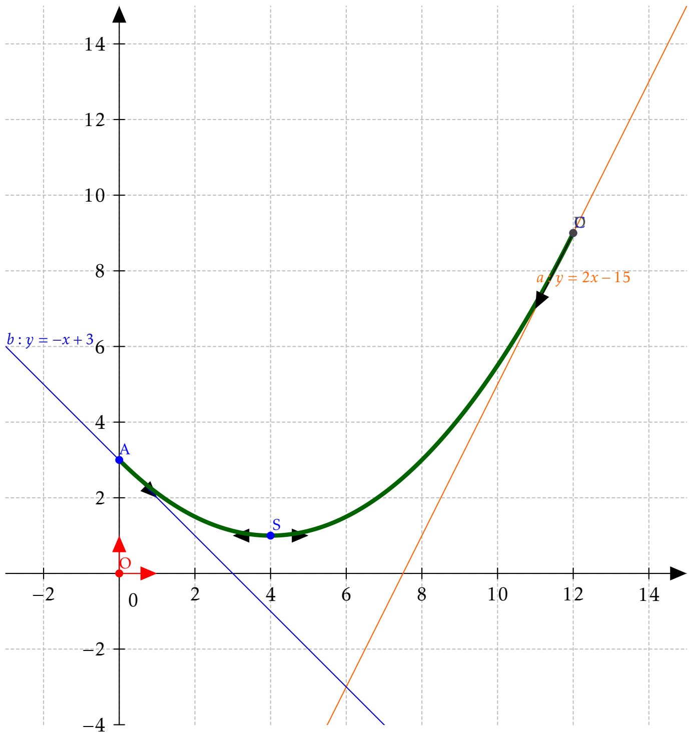
   b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 12.
   Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 12 est :
   $y=f'(12)(x-12)+f(12)$. Soit $y=2(x-12)+9 \Longleftrightarrow y=2x-15$

   La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 12 a pour équation $y=2?x-15$.

2. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus. On placera les points d'abscisses 0, 4, 12 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est $y=f'(0)x+f(0)$. Soit $y=-x+3$.

$f'(4)=0$ donc la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.



Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-2}$
et $\mathcal{C}$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$

   On a donc $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Étudier la limite de f en 2.Interpréter le résultat.
   On étudie le signe de $x-2$ sur $\mathbb{R}$
   $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $x - 2$		$-$	0	$+$	

   $\lim\limits_{x\to2^+} x - 2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{4}{x-2} = +\infty$

   On a donc $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} (x+2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2}{x-2} = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

3. On note Δ, la droite d'équation $y = x + 2$. Prouver que la droite Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$.
   Sur $]2;+\infty[$, on forme $f(x) - (x+2) = \dfrac{4}{x-2}$
   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$

   La droite d'équation $y = x + 2$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4. Calculer la dérivée de$f$; on montrera que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$. On dérive $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{x^2}{x-2}$,
   on a $f = \dfrac{u}{v}$, d'où on déduit $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Comme $u(x) = x^2$; on déduit $u'(x) = 2x$
De même $v(x) = x - 2$, et donc $v'(x) = 1$
On a alors $f'(x) = \dfrac{2x)(x-2) - (1)(x^2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x + x^2}{(x-2)^2}$

$$\boxed{\text{On a bien } f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}}$$

5. Étudier les variations de f
On étudie le signe de la dérivée :
   - Le dénominateur est le carré d'un réel non nul donc est strictement positif.
     La dérivée a donc le signe du numérateur.
   - Le numérateur est un trinôme du second degré qui a pour racines 0 et 4; il a donc le signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de $-x^2 + 8x - 15$		+	0	−	0	+	

On déduit le tableau de variations de f sur $]4;+\infty[$:

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	−	0	+	
Variations de f	|| $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

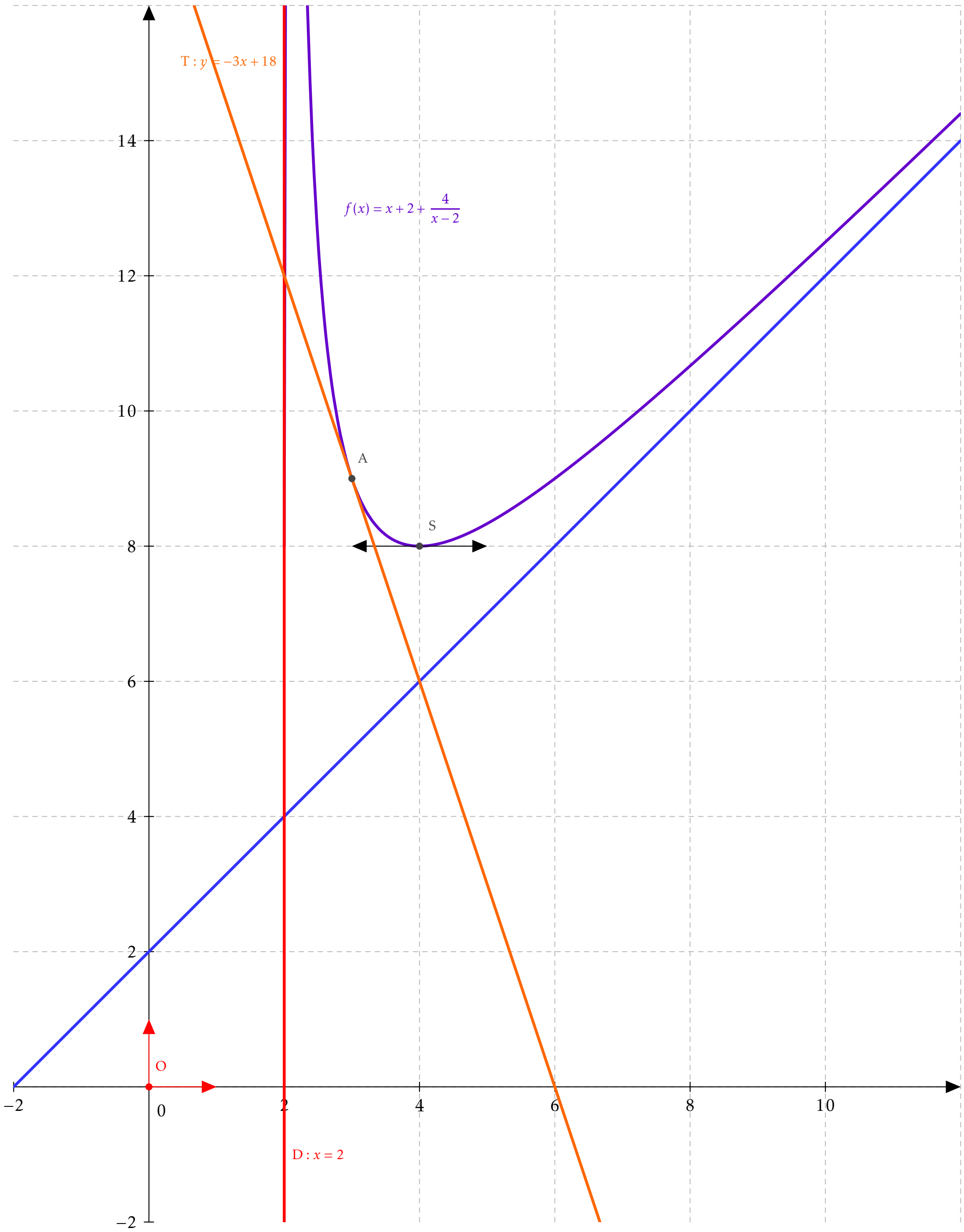
$f(4) = 4 + 2 + \dfrac{4}{4-2} = 8$

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3. T a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

- $f'(3) = \dfrac{9-12}{1} = -3$
- $f(3) = 3 + 2 + \dfrac{4}{1} = 9$

$$\boxed{\text{T a pour équation } y = -3(x-3) + 9\text{, soit } y = -3x + 18}$$

Représenter $\mathcal{C}$, Δ et T.



Les suites ...

Exercice 3

Depuis 2000, l'Union Européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 milligrammes par kilomètre en conduite normalisée. L'objectif de l'Union Européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 milligrammes par kilomètre.
La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de 11,7 % par an.

1. *a*) Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 milligrammes par kilomètre en 2001.

   La norme tolérée en 2001 était : $635 \times \left(1 - \dfrac{11{,}7}{100}\right) = 560{,}705$

   Ainsi, la norme tolérée était d'environ 561 milligrammes par kilomètre en 2001.

   b) Un véhicule émettait 500 milligrammes par kilomètre en 2002.
   Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme tolérée cette année-là .

2. Dans le cadre d'une recherche, Louise veut déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif.
 Louise a amorcé l'algorithme suivant :

```
Variables
    n : un nombre entier naturel
    p : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à p la valeur 635
Traitement
    Tant que ......
        Affecter à n la valeur n+1
        Affecter à p la valeur 0,883 × p
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher ......
```

 a) Expliquer l'instruction « Affecter à p la valeur $0{,}883 \times p$ ».
 Soit p, la norme tolérée, exprimée en milligrammes l'année de rang n. L'année suivante, la norme tolérée, exprimée en milligrammes est $p \times \left(1 - \dfrac{11{,}7}{100}\right) = 0{,}883 \times p$

 b) Deux lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter afin de permettre à Louise de déterminer l'année recherchée.

```
Variables
    n : un nombre entier naturel
    p : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à p la valeur 635
Traitement
    Tant que p ≥ 100
        Affecter à n la valeur n+1
        Affecter à p la valeur 0,883 × p
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher 2000 + n
```

3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la norme tolérée, exprimée en milligrammes l'année $(2000+n)$. On a ainsi $u_0 = 635$.

 a) Établir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{11{,}7}{100}\right) = 0{,}883 \times u_n$

 Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison 0,883.

 b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
 (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 635$ et de raison $q = 0{,}883$ donc :

 pour tout entier naturel $n, u_n = 635 \times 0{,}883^n$.

4. Déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif.
 On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que : $635 \times 0{,}883^n \leqslant 100$.
 En exécutant l'algorithme sur la calculatrice ou en programmant la suite (u_n) sur la calculatrice, on, obtient : $n = 15$.

 L'Union Européenne atteindra son objectif à partir de 2015.

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
 Comme $-1 < 0{,}883 < 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}883^n = 0$, et donc :

 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Les nombres complexes

Exercice 4

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -5 + 5\mathrm{i}$ est :

$$\boxed{\text{b) } z = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}$$

2. Si $z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, alors le produit $z_1 \times z_2$ est un nombre complexe :

$$\boxed{\text{c)de module 4 et dont un argument est } \frac{5\pi}{12}}$$

3. Le nombre complexe $\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$ est égal à :

$$\boxed{\text{d) } -\mathrm{i}}$$

Le nombre complexe z de module $2\sqrt{3}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique :

$$\boxed{\text{c) } -\sqrt{3}+3\mathrm{i}}$$

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$z + \mathrm{i}z\sqrt{3} = 8.$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
$z + \mathrm{i}z\sqrt{3} = 8 \Longleftrightarrow z\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 8 \Longleftrightarrow z = \dfrac{8}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$
On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.
$z = \dfrac{8\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{8\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2} = 2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\}}$$

2. On considère les nombres complexes $z_1 = 2-2\sqrt{3}\mathrm{i}, z_2 = \overline{z_1}, z_3 = z_1 \times e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_4 = -z_1$.
On note A le point d'affixe z_1 , B le point d'affixe z_2, C le point d'affixe z_3 et D le point d'affixe z_4.

a) Déterminer la forme algébrique de z_2, z_3 et z_4.

✎ $z_2 = \overline{z_1} = 2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$

✎ $z_3 = z_1 \times e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \left(2-2\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(2-2\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}-3 = -2-\mathrm{i}2\sqrt{3}$

$$\boxed{z_3 = -2-\mathrm{i}2\sqrt{3}}$$

✎ $z_4 = -z_1 = -2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

b) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_3 .
Le module de z_1 est $|z_1| = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12}$, soit

$$\boxed{|z_1| = 4.}$$

Son argument θ vérifie les relations

$$\cos\theta = \frac{2}{4}\sin\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \qquad \text{soit} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{d'où l'on tire}$$

$$\boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$$

à $2k\pi$ près

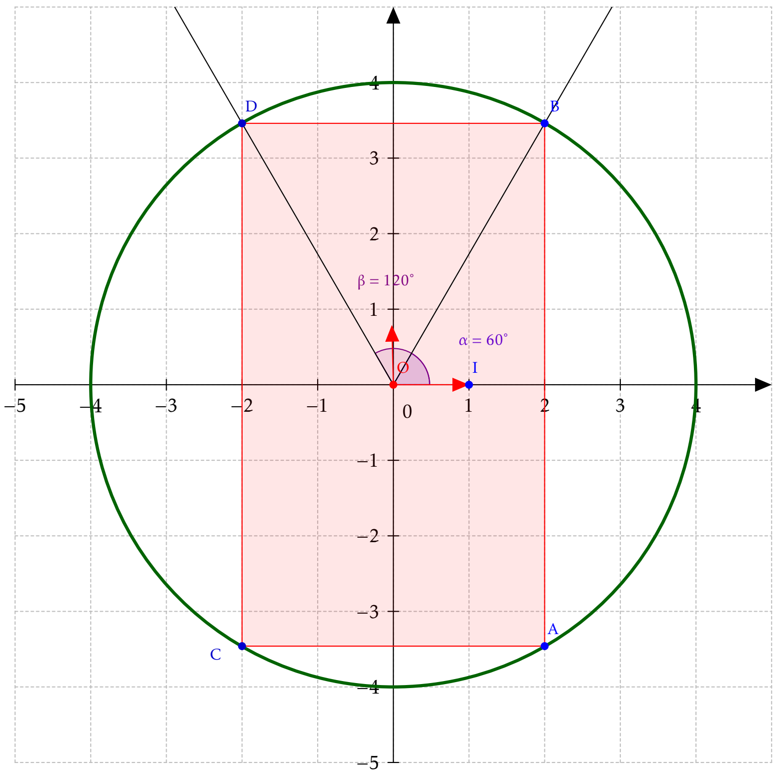
On a donc finalement

$$\boxed{z_1 = \left[4, -\frac{\pi}{3}\right] = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$z_3 = z_1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ On a donc finalement

$$\boxed{z_3 = \left[4, -\frac{2\pi}{3}\right] = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

On admettra que z_2 a pour module 4 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$
On admettra que z_4 a pour module 4 et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les quatre points dans le repère (on laissera les traits de construction).



Monter que les points A, B , C et D sont sur un même cercle (on précisera le centre et le rayon).
On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 4$
Ainsi OA = OB = OC = OD = 4,

Les points A,B,C et D sont donc sur le cercle de centre O de rayon 4.

1. Montrer que O est le milieu de [AD].
   Le milieu de [AD] a pour affixe $\dfrac{1}{2}(z_A + z_D) = \dfrac{1}{2}\left(2 + 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}\right) = 0 = z_O$
   O est donc le milieu de [AD].
   On admettra que O est aussi le milieu de [BC]
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? (toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation).
   - Les diagonales de ABDC ont le même milieu O, donc ABDC est un parallélogramme.
   - Connaissant les affixes de $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2+2i\sqrt{3}-\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = 4i\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -2-2i\sqrt{3}-\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = -4$, on en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

     $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

     d'où le produit scalaire

     $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x.x' + y.y' = 0 \times (-4) + 4\sqrt{3} \times 0 = 0$$

     ce qui prouve que ABC rectangle en A .

ABDC est donc un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.