DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° II : Récurrence,Suites
TS4 Le corrigé

TS4 2013

Exercice II 1

La suite de FIBONACCI [a] est la suite (U_n) définie par $U_1 = U_2 = 1$ et la relation de récurrence pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \tag{1}$$

1. Calculer les dix premiers termes de la suite de Fibonacci.
On obtient sans difficulté :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Il a fallu attendre 500 ans pour trouver l'expression du terme général de la suite de Fibonacci. Je vous propose une démonstration de l'étonnante [b] formule découverte par DE MOIVRE [c] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2}$$

On peut montrer facilement par récurrence que pour tout entier n ; U_n est un entier.
Par contre il n'est pas immédiat de voir que $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ est un entier !

2. Supposons un instant que (V_n) soit une suite géométrique non nulle vérifiant la même relation de récurrence que (U_n). Prouver alors que la raison de (V_n) est nécessairement solution de :

$$x^2 = x + 1 \tag{3}$$

Si (V_n) est géométrique de raison x, alors $V_{n+1} = xV_n$ et $V_{n+2} = xV_{n+1} = x^2V_n$.
En reportant dans la relation $V_{n+2} = V_{n+1} + V_n$, on obtient :
Pour tout entier n : $x^2V_n + xV_n = V_n$
Soit pour tout entier n : $(x^2 + x - 1)V_n = 0$
Or par hypothèse la suite V_n est non nulle, donc $V_0 \neq 0$ et $x \neq 0$ et donc aucun terme n'est nul ! En effet $V_n = x^nV_0$.
Ayant $\forall n \in \mathbb{N}; V_n \neq 0$ on en déduit que x est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (3). On notera ϕ (le nombre d'or) la racine positive et $\bar{\phi}$ la racine négative.

On calcule $\Delta = 5$, comme $\Delta > 0$, l'équation a deux racines $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ et $\bar{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618$ de (3).

4. La suite de Fibonacci est–elle une suite géométrique ?
On a $\dfrac{U_2}{U_1} = 1$ et $\dfrac{U_3}{U_2} = 2$,
on a donc $\dfrac{U_2}{U_1} \neq \dfrac{U_3}{U_2}$,
donc la suite de Fibonacci n'est pas géométrique.

5. En utilisant uniquement l'équation (3) vérifiée par ϕ , exprimer ϕ^n pour n valant 2, 3, 4, 5, puis 6 sous la forme $a\phi + b$ où à chaque fois a et b sont des entiers naturels. On reproduira et complètera alors le tableau ci–dessous avec les valeurs obtenues pour a et b. Que remarque-t-on sur les coefficients a et b ?

- $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ donc $\phi^2 = \phi + 1$
- $\phi^3 = \phi^2 \times \phi = (1+\phi)\phi = \phi + \phi^2 = \phi + \phi + 1$ donc $\phi^3 = 2\phi + 1$
- $\phi^4 = \phi^3 \times \phi = (2\phi + 1)\phi = 2\phi^2 + \phi = 2\phi + 2 + \phi$ donc $\phi^4 = 3\phi + 2$
- $\phi^5 = \phi^4 \times \phi = (3\phi + 2)\phi = 3\phi^2 + 2\phi = 3\phi + 3 + 2\phi$ donc $\phi^5 = 5\phi + 3$
- $\phi^6 = \phi^5 \times \phi = (5\phi + 3)\phi = 5\phi^2 + 3\phi = 5\phi + 5 + 3\phi$ donc $\phi^6 = 8\phi + 5$

a. Très célèbre, particulièrement depuis le succès du livre *Da Vinci Code*. FIBONACCI (Pise 1170–1245)
b. Pourquoi peut–on trouver cette formule étonnante au premier abord ?
c. Abraham DE MOIVRE (Vitry le François 1667– Londres 1754) Mathématicien français, ami d'Isaac NEWTON.

n	1	2	3	4	5	6
a	1	1	2	3	5	8
b	0	1	1	2	3	5

On remarque que les coefficients a et b sont les coefficients de la suite de Fibonacci. Ceci permet de conjecturer la propriété :

$$\phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1}$$

6. Prouver alors par récurrence que pour tout entier n supérieur à 2 :

$$\phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1}$$

Notons $P(n)$ la propriété : $\phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1}$ dépendant de l'entier n ; $n \geq 2$.

- Initialisation : On a $\phi^2 = \phi + 1 = U_2 \times \phi + U_1$ car $U_2 = U_1 = 1$
  Donc la propriété est vraie au rang 2.
- Hérédité : Soit $k \geq 2$; on suppose que $\phi^k = U_k \times \phi + U_{k-1}$
  Alors $\phi^{k+1} = \phi^k \times \phi = \left(U_k \times \phi + U_{k-1}\right)\phi = U_k \times \phi^2 + U_{k-1}\phi = U_k \times (\phi + 1) + U_{k-1}\phi = (U_{k-1} + U_k)\phi + U_k$
  Or d'après la définition de U ; on a $U_{k-1} + U_k = U_{k+1}$,
  donc $\phi^{k+1} = U_{k+1} \times \phi + U_k$.
  Ce qui établit l'hérédité.
  $P(2)$ est vraie,pour un certain $k \geq 2$; on a prouvé que $P(k)$ vraie entraîne $P(k+1)$ vraie ; le principe de récurrence s'appliquant on a pour tout $n \geq 2$: $\phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1}$

7. En déduire la formule (2).
Comme $\bar{\phi}$ est aussi une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$; on montre de la même façon que

$$\text{pour tout } n \geq 2 : \bar{\phi}^n = U_n \times \bar{\phi} + U_{n-1} \ (2)$$

$$\text{pour tout } n \geq 2 : \phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1} \ (1)$$

$$(1) - (2) \text{ fournit} \phi^n - \bar{\phi}^n = U_n\left(\phi - \bar{\phi}\right) \ (*)$$

Or $\phi - \bar{\phi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, en divisant par $\phi - \bar{\phi} = \sqrt{5}$ dans $(*)$, on obtient

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \bar{\phi}^n\right)$$

C'est la relation souhaitée !

8. En déduire la limite de U_n.
On rappelle la propriété suivante établie dans le cours :

> **Théorème II 1 :**
> - Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
> - Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Ici $\phi \approx 1,618$ donc $\phi > 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi^n = +\infty$
$\bar{\phi} \approx -0,618$ donc $-1 < \bar{\phi} < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \bar{\phi}^n = 0$.
Par somme, en utilisant l'égalité $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \bar{\phi}^n\right)$, et comme $\dfrac{1}{\sqrt{5}} > 0$; on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$$

9. On s'intéresse maintenant aux quotients de deux termes successifs de la suite de Fibonacci. On considère donc la suite (Q_n) définie par : $Q_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = \frac{\phi - \bar{\phi}\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}$$

On a d'une part $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \bar{\phi}^n\right)$ (I)

et d'autre part $U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}\right)$ (II)

En formant le rapport de ces égalités, en remarquant que $U_n \neq 0$; on obtient :

$$Q_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\phi^n - \bar{\phi}^n}$$

$$Q_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\phi^n \times \phi - \bar{\phi}^n \times \bar{\phi}}{\phi^n - \bar{\phi}^n}$$

$$Q_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\phi^n\left(\phi - \bar{\phi} \times \frac{\bar{\phi}^n}{\phi^n}\right)}{\phi^n\left(1 - \frac{\bar{\phi}^n}{\phi^n}\right)}$$

$$Q_n = \frac{\phi - \bar{\phi}\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}$$

10. Prouver que [d] : $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = \phi$.

On a $\frac{\bar{\phi}}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+5-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$

Or $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \approx -0,38$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n = 0$, et donc d'après les théorèmes sur opérations et limite,

$$\boxed{\text{on obtient } \lim_{n\to+\infty} Q_n = \phi}$$

11. Prouver en utilisant (1) que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n} \quad \text{et} \quad Q_1 = 1$$

On a $Q_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$; mais d'après la définition de (U_n) ; on a $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$,

ainsi $Q_{n+1} = \frac{U_{n+1}+U_n}{U_{n+1}} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1}} + \frac{U_n}{U_{n+1}} = 1 + \frac{1}{Q_n}$

Par ailleurs $Q_1 = \frac{U_2}{U_1} = 1$

12. Expliquer l'écriture de ϕ dite en « fraction continue » : $\phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$

En calculant les termes successifs de (Q_n)) sans simplifier la fraction, on obtient :

- $Q_2 = 1 + \frac{1}{1}$
- $Q_3 = 1 + \frac{1}{Q_2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$
- $Q_4 = 1 + \frac{1}{Q_3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$

Ainsi de suite, or comme la limite de Q_n est ϕ ; on obtient ainsi l'écriture en fraction continue de ϕ !

d. Cette limite signifie que (U_n) se comporte pour n grand « comme » une suite géométrique de raison ϕ.