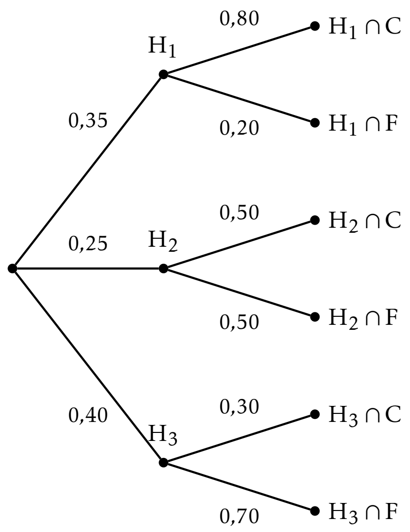
Bac S 20 Juin 2013

1 Exercice 1 : Probabilités 4 points

Exercice 1

1. *a*) Un arbre pondéré représentant la situation :



b) On veut calculer $p(H_3 \cap C) = p(H_3) \times p_{H_3}(C) = 0,40 \times 0,50 = 0,20$

$$\boxed{p(H_3 \cap C) = 0,20}$$

c) Calculons la probabilité de l'événement C.
$C = (H_1 \cap C) \cup (H_2 \cap C)(H_3 \cap C)$.
La formule des probabilités totales donne

$$p(H_1 \cap C) + p(H_2 \cap C) + p(H_3 \cap C) = p(H_1) \times p_{H_1}(C) + p(H_2) \times p_{H_2}(C) + p(H_3) \times p_{H_3}(C)$$

soit $p(C) = 0,35 \times 0,80 + 0,25 \times 0,50 + 0,40 \times 0,30 = 0,525$

$$\boxed{p(C) = 0,525}$$

d) On veut calculer la probabilité de l'événement « L'arbre a été acheté chez H_1 sachant que c'est un conifère ».
soit à calculer la probabilité conditionnelle $p_C(H_1) = \dfrac{p(H_1 \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,80}{0,525}$

$$\boxed{p_C(H_1) \approx 0,533}$$

2. *a*) On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
Succès : « l'arbre choisi au hasard est un conifère » avec la probabilité $p = 0,525$

Echec : « l'arbre choisi au hasard est un arbre à feuilles » avec la probabilité $q = 1 - p = 0,475$
On répète 10 fois cette expérience de façon indépendante et on considère la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de succès .
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,525)$ de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$

b) Calculons la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 5 conifères et donnons-en une valeur approchée à 10^{-3}, près.
Pour tout entier $k \in [0; 10]$; on a :

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,525^k \times 0,475^{10-k}.$$

On veut $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times 0,475^5$.

$$\boxed{p(X = 5) \approx 0,243}$$

c) Calculons la probabilité que l'échantillon prélevé contienne au moins deux arbres feuillus et donnons-en une valeur approchée à 10^{-3}, près.
On veut calculer ici la probabilité de l'événement $X \leq 8$
$p(X \leq 8) = 1 - p(X > 8) = 1 - p(X = 9) - p(X = 10) = 1 - \binom{10}{9} \times 0,525^9 \times 0,475^1 - \binom{10}{10} \times 0,525^10 \approx 0,984$

La probabilité que l'échantillon prélevé contienne au moins deux arbres feuillus est environ 0,984 à 10^{-3}, près.

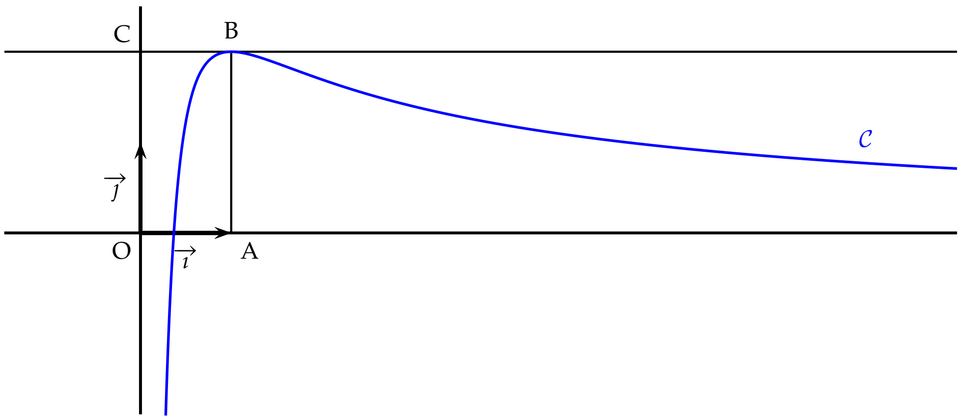
Remarque :P(X ≤ 8) peut s'obtenir avec la calculatrice par :$binom$FR$\acute{e}p$(10,0.525,8)

2 Exercice 2 : Fonction

Exercice 2

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé , dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On dispose des informations suivantes :

- Les points A,B,C ont pour coordonnées respectives (1, 0), (1, 2), (0, 2) ;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a+b\ln x}{x}$



1. *a*) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   Le point B(1,2) est un point de $\mathcal{C}$, donc $f(1) = 2$
   La tangente à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 1 est horizontale , donc $f'(1) = 0$.

   $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$.

   b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x,$f'(x) = \dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$

   $f = \dfrac{u}{v}$, donc $f' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
   ici $u(x) = a+b\ln x$ et $v(x) = x$
   on a donc $u'(x) = \dfrac{b}{x}$ et $v'(x) = 1$
   puis $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x}\times x - 1\times(a+b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b-a-b\ln x}{x^2}$

   $f'(x) = \dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

   c) En déduire les réels a et b.
   $f(1) = 2$ donc $\dfrac{a+b\ln 1}{1} = 2$ donc $a = 2$, en effet $\ln 1 = 0$.
   $f'(1) = 0$ donc $\dfrac{(b-a)-b\ln 1}{1^2} = 0$ donc $b-a = 0$ donc $b = a = 2$

   $a = 2$ et $b = 2$ ainsi $f(x) = \dfrac{2+2\ln x}{x}$

2. *a*) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   D'après la question 1. $f'(x) = \dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$, on a remplacé a et b par 2.
   Comme on travaille sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et 2>0 ,

   donc $f'(x)$ a le signe de $-\ln x$.

   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\ln x}{x}$

✍ Limite en 0^+ : sur $]0;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{2+2\ln x}{x} = (2+2\ln x)\times\dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(2+2\ln x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}\quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$$

✍ Limite en $+\infty$: sur $]0;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{2+2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x}+\dfrac{2\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x} = 0\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On a utilisé la limite de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

c) En déduire le tableau de variation de la fonction f. On sait que la dérivée a le signe de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0		α		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$			0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	1	↗	2	↘	0

3. *a*) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.

- f est continue sur $\mathrm{I} =]0;1]$ (elle est dérivable sur I) ;
- f est strictement croissante sur I ;
- $f(1) = 2$;
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

donc f réalise une bijection de $]0;1]$ sur $]-\infty;2]$. Comme $1 \in]-\infty;2]$ l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans I

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } f(x) = 1 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans I}}$$

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

On a $f(5) = \dfrac{2+2\ln 5}{5} \approx 1{,}04$

$f(6) = \dfrac{2+2\ln 6}{6} \approx 0{,}93$

On a donc $f(5) > 1 > f(6)$, soit $f(5) > f(\beta) > f(6)$
comme f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$; on déduit $5 < \beta < 6$

$$\boxed{5 < \beta < 6}$$

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables : a,b et m sont des réels.
Initialisation :
  a PREND LA VALEUR DE 0
  b PREND LA VALEUR DE 1
Traitement :
  TANT QUE $b-a>0{,}1$
    m PREND LA VALEUR DE $\frac{1}{2}(a+b)$
    SI $f(m)<1$ ALORS
      m PREND LA VALEUR DE a
    SINON
      m PREND LA VALEUR DE b
    FIN SI
  FIN TANT QUE
Sortie :
AFFICHER a
AFFICHER b

a) Faire tourner l'algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	L'algorithme s'arrête car la condition $b-a\leq 0{,}1$ est réalisée

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
Cet algorithme fournit un encadrement à 0,1 près de l'unique solution α de l'équation $f(x)=1$ se trouvant dans l'intervalle $]0,1]$. La méthode utilisée est la dichotomie.

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Variables : a,b et m sont des réels.
Initialisation :
  a PREND LA VALEUR DE 5
  b PREND LA VALEUR DE 6
Traitement :
  TANT QUE $b-a>0{,}1$
    m PREND LA VALEUR DE $\frac{1}{2}(a+b)$
    SI $f(m)>1$ ALORS
      m PREND LA VALEUR DE a
    SINON
      m PREND LA VALEUR DE b
    FIN SI
  FIN TANT QUE
Sortie :
AFFICHER a
AFFICHER b

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

Le rectangle OABC a pour aire $\mathcal{A}=\text{OA}\times\text{BC}=2(u.a.)$
On résout l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$
$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2+2\ln x}{x} \Leftrightarrow 2+2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.
La courbe $\mathcal{C}$ rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse $x=\frac{1}{e}$.
On doit donc montrer que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\frac{1}{e}$ et $x=1$ vaut $1u.a.$.
Comme f est continue, positive sur $\left[\frac{1}{e};1\right]$, en effet :
si $x\geq\frac{1}{e}$ alors $\ln x\geq\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
soit $1+\ln x\geq 0$ puis en multipliant par $\frac{2}{x}>0$ sur $]0;++\infty[$, on obtient $f(x)\geq 0$,

cette aire vaut $\mathcal{B} = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$.

On doit donc établir $\mathcal{B} = 1$ soit $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$, terminer la démonstration.

$f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x = 2\times\dfrac{1}{x} + 2u'(x)\times u(x)$ où $u(x) = \ln x$.
On note F une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
$\mathrm{F}(x) = 2\ln x + (\ln x)^2$. On a utilisé le fait que $u'u^n$ a pour primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ pour $n \neq -1$.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln 1 + (\ln 1)^2 - \left(2\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2\right) = 0 - (-2+1) = 1$$

En effet $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\ln e = -1$

3 Exercice 3 : Un QCM avec justification

Exercice 3

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-i| = |z+1|$ est une droite.
   On note A et B les points d'affixes respectives i et -1.
   $|z-i| = |z+1| \Leftrightarrow |z-i| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM}$

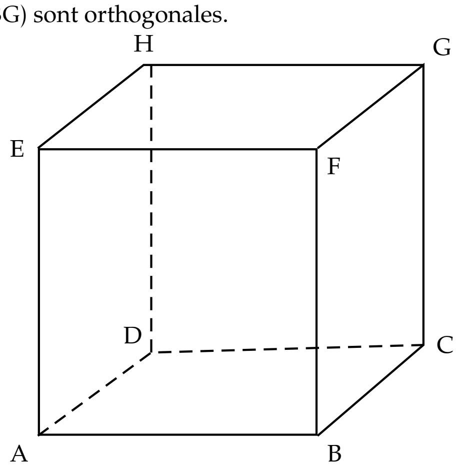
   L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB], la proposition 1 est donc vraie.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.
   On met $u = 1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle .
   $|u| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$
   Ainsi $u = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
   On a alors $(1+i\sqrt{3})^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8i\sqrt{3}$

   Le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^4$ n'est pas un nombre réel,la proposition 2 est donc fausse.

   Remarque (4 étant un petit exposant) : $(1+i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$
   alors $(1+i\sqrt{3})^4 = \left((1+i\sqrt{3})^2\right)^2 = (-2+2i\sqrt{3})^2 = 4 - 8i\sqrt{3} - 12 = -8 - 8i\sqrt{3}$

3. Soit ABCDEFGH un cube.
   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



   On rapporte l'espace au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ en choisissant AB comme unité de longueur.

   On a , dans ce repère E(0 ,0 ,1);C(1 ,1 ,0); $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$(1 ,1 , − 1);

B(1 ,0 ,0);G(1 ,1 ,1); $\overrightarrow{BG}(0\ ,1\ ,1\ )$;
$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = xx' + yy' + zz' = 0 + 1 - 1 = 0$
Ayant $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = 0$, les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.La proposition 3 est exacte.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit le plan P d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées (1,2,-2).
Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan P a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& 1+3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Une droite D perpendiculaire au plan P admet pour vecteur directeur un vecteur normal du plan P, soit ici $\vec{n}(1,1,3)$

$$S(1,-2,-2) \in D \Leftrightarrow \text{ il existe } t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x_S &=& 2+t \\ y_S &=& -1+t \\ z_S &=& 1+3t \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{ il existe } t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} 1 &=& 2+t \\ -2 &=& -1+t \\ -2 &=& 1+3t \end{array}\right.$$

$$S(1,-2,-2) \in D \Leftrightarrow \text{ il existe } t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} t &=& -1 \\ t &=& -1 \\ t &=& -1 \end{array}\right.$$

Il existe bien $t \in \mathbb{R}$ tel que $t = -1$ donc $S(1,-2,-2) \in D$

La droite D perpendiculaire au plan P passant par S a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& 1+3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$

4 Exercice 4 : Suites

Exercice 4

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. *a)* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   - $n = 0$ dans la relation : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ donne $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$
   - $n = 1$ donne $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{14}{9} + \frac{4}{3} = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$
   - $n = 2$ donne $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{5}{3} = \frac{52}{27} + \frac{45}{27} = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$
   - $n = 3$ donne $u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{97}{27} + 2 = \frac{194}{81} + \frac{162}{81} = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$

   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
   Au vu des premiers termes, la suite (u_n) semble strictement croissante.

2. *a)* Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n \leq n + 3$.
   notons P(n) la propriété $u_n \leq n + 3$:
   - Initialisation : $u_0 = 2$ et $2 \leq 3$ donc P(0) est vraie.
   - Hérédité : Soit $p \geq 0$, on suppose que : $u_p \leq p + 3$ (HR)
     On doit prouver que : $u_{p+1} \leq (p+1) + 3$, c'est-à-dire $u_{p+1} \leq p + 4$.
     On utilise la relation $u_{p+1} = \frac{2}{3}u_p + \frac{1}{3}p + 1$

     En multipliant par $\frac{2}{3} > 0$ de part et d'autre dans (HR), on obtient : $\frac{2}{3}u_p \leq \frac{2}{3}(p + 3\ )$.
     En ajoutant $\frac{1}{3}p + 1$ de part et d'autre :
     $\frac{2}{3}u_p + \frac{1}{3}p + 1 \leq \frac{2}{3}(p + 3\ ) + \frac{1}{3}p + 1$.
     soit $u_{p+1} \leq \frac{2}{3}p + 2 + \frac{1}{3}p + 1$
     c'est-à-dire :$u_{p+1} \leq p + 3 \leq p + 4$
   - Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 0; u_n \leq n + 3$

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+}1 - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

D'après 2.a., pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq n+3$

donc $n+3-u_n \geq 0$

puis en multipliant par $\frac{1}{3} > 0$, on obtient $\frac{1}{3}(n+3-u_n) \geq 0$

donc pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$,

On a donc prouvé que la suite (u_n) est croissante.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Pour tout $n \geq 0, v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

Ayant pour tout entier naturel $n; v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$:

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de plus $v_0 = u_0 - 0 = 2$;

on a pour tout $n \geq 0, v_n = q^n \times v_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2$

De $v_n = u_n - n$ on déduit :

$$u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

On a utilisé la limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

Pour $n \geq 0; S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Par ailleurs $u_n = v_n + n$; donc :

$$Sn = \sum_{k=0}^{n} v_k + k = v_0 + 0 + v_1 + 1 + v_2 + 2 \ldots + v_n + n$$

$$Sn = \sum_{k=0}^{n} v_k + k = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_n + 1 + 2 + \ldots + n$$

$$S_n = G_n + A_n \text{ où } G_n = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_n \text{ et } A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Ayant (v_n) est géométrique , la somme S de N termes successifs est :

$$S = \frac{(1-q^N)}{1-q}P \quad \text{car } q \neq 1$$

N = nombre de termes de la somme;

P = premier terme de la somme ;

q = raison;

Ici $G_n = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_n = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \times 2 = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

Enfin la somme S de N termes successifs d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{N(P+D)}{2}$$

N = nombre de termes de la somme;

P = premier terme de la somme ;

D = dernier terme de la somme;

Ici $A_n = 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Pour finir $S_n = G_n + A_n$:

$$\boxed{S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}$$

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

$T_n = \dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{6}{n^2}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n^2} = 0\end{array}\right\} \text{Par produit } \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 0.$$

$\dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$$\text{Ainsi } \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n^2}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \text{Par somme } \lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$

5 *Exercice 5 : Spécialité 5 points*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.
Chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville. Donc pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_{n+1} & = & 95\%v_n + 1\%c_n \\ c_{n+1} & = & 5\%v_n + 99\%c_n \end{array}\right. \quad Ainsi \left\{\begin{array}{lcl} v_{n+1} & = & 0{,}95v_n + 0{,}01c_n \\ c_{n+1} & = & 0{,}05v_n + 0{,}99c_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95v_n + 0{,}01c_n \\ 0{,}05v_n + 0{,}99c_n \end{pmatrix}}$$

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Comme $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$ on a $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a + 0{,}01b \\ 0{,}05a + 0{,}99b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a + 0{,}01b \\ 0{,}05a + 0{,}99b \end{pmatrix}$$

Ainsi $\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0{,}95a + 0{,}01b \\ d & = & 0{,}05a + 0{,}99b \end{array}\right.$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$ donc $P \times \dfrac{1}{6}Q = I_2$

$Q \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$, donc $\dfrac{1}{6}Q \times P = I_2$, donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$P^{-1}AP = \underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}7 & 0{,}94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a donc } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix} = D}$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$
Initialisation : $D = P^{-1} \times A \times P$ (question précédente). d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , il vient :
$P \times D^1 \times P^{-1} = P \times P^{-1} \times A \times P \times P^{-1}$ et donc n a bien $A^1 = P \times D^1 \times P^{-1}$
Hérédité : Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = P \times D^k \times P^{-1}$.
Alors $A^{k+1} = A^k \times A = \left(P \times D^k \times P^{-1}\right) \times \left(P \times D \times P^{-1}\right) = P \times D^k \times \left(P^{-1} \times P\right) \times D \times P^{-1} =$
$P \times D^k \times I \times D \times P^{-1} = P \times \left(D^k \times D\right) \times P^{-1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$.
La formule est donc vraie au rang $k+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0{,}94^n\right)v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0{,}94^n\right)c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?
Si $-1 < q < 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0{,}94^n\right)v_0 = \frac{1}{6}v_0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(1 - 0{,}94^n\right)c_0 = \frac{1}{6}c_0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 = \frac{1}{6}\left(v_0 + c_0\right) = \frac{250\,000}{6} \approx 41667.$$

La population citadine sera, au bout d'un grand nombre d'années de 41 667 habitants, soit environ $\frac{1}{6}$ de la population totale et donc la population vivant à la campagne sera de 208 333 habitants, soit environ $\frac{5}{6}$ de la population totale .