- ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
- Durée de l'épreuve : 4 heures
- La calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants qui doivent être tous traités. Un résultat précédemment donné dans le texte, pourra être admis pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera évaluée favorablement. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

I Nombres complexes

Exercice X1 Nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1+2\text{i} \quad ; \quad b = -2-\text{i} \quad ; \quad c = -3+\text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique. Plus bas ...

2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-\text{i}}{-1+2\text{i}} = \dfrac{(-2-\text{i})(-1-2\text{i})}{1^2+2^2} = \dfrac{2-2+4\text{i}+\text{i}}{5} = \text{i}$

$$\boxed{\frac{b}{a} = \text{i}}$$

- En prenant les modules dans l'égalité $\dfrac{b}{a} = \text{i}$, on a :
  $\left|\dfrac{b}{a}\right| = |\text{i}| \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\text{OB}}{\text{OA}} = 1 \Leftrightarrow \text{OA} = \text{OB}$
  Le triangle OAB est donc isocèle en O.
- En prenant les arguments dans l'égalité $\dfrac{b}{a} = \text{i}$, on a :
  $\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(\text{i}) \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$
  Le triangle OAB est donc rectangle en O.

Le triangle AOB est donc rectangle isocèle en O.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M′ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z+1-2\text{i}}{z+2+\text{i}}$$

a) Calculer l'affixe c' du point C′, image de C par f et placer le point C′ sur la figure.
$c' = f(c) = \dfrac{-3+\text{i}+1-2\text{i}}{-3+\text{i}+2+\text{i}} = \dfrac{-2-\text{i}}{-1+2\text{i}} = \dfrac{\text{i}(-1+2\text{i})}{-1+2\text{i}} = \text{i}$

$$\boxed{c' = f(c) = \text{i}}$$

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z'| = 1$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \left|\frac{z+1-2\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}}\right| = 1 \text{ avec } z \neq b$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \left|\frac{z-(-1+2\mathrm{i})}{z-(-2-\mathrm{i})}\right| = 1 \text{ avec } z \neq b$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \left|\frac{z_\mathrm{M}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{M}-z_\mathrm{B}}\right| = 1 \text{ avec } z \neq b$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \frac{|z_\mathrm{M}-z_\mathrm{A}|}{|z_\mathrm{M}-z_\mathrm{B}|} = 1 \text{ avec } z \neq b$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = 1 \text{ avec } \mathrm{M} \neq \mathrm{B}$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \text{ avec } \mathrm{M} \neq \mathrm{B}$$

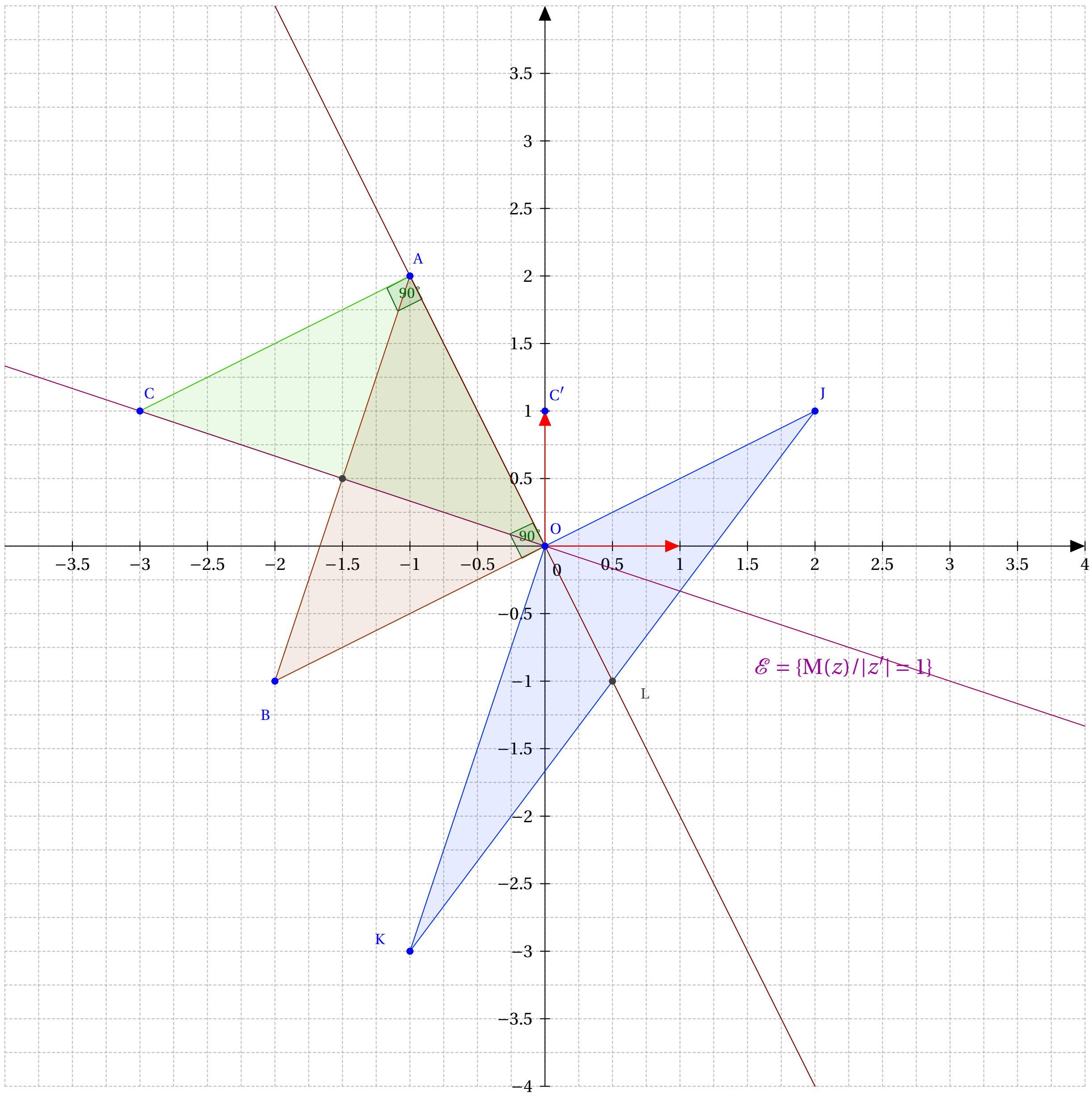
$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \mathrm{M} \text{ est équidistant de A et de avec } \mathrm{M} \neq \mathrm{B}$$

Or $\mathrm{BA} \neq \mathrm{BB}$

donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice de [AB] en entier.

c) Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.
On a montré à la question 1. que le triangle OAB est isocèle en O donc OA = OB , ainsi $\mathrm{O} \in \mathscr{E}$
Par ailleurs $|c'| = |\mathrm{i}| = 1$, donc $\mathrm{C} \in \mathscr{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit J et K les points d'affixes respectives $2 + i$ et $-1 - 3i$
On note L le milieu de [JK].
Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.



- La médiane (m_1) issue de O dans OJK est la droite qui passe par O qui joint le milieu L de [JK] : $z_L = \dfrac{1}{2}(z_J + z_K) = \dfrac{1}{2}(2 + i - 1 - 3i) = \dfrac{1}{2} - i$.

- La hauteur (h_1) issue de O dans le triangle OAC est la droite qui passe par O et est perpendiculaire à (AC).

$$(d_1) = (h_1) \Leftrightarrow (OL) \perp (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$z_{\overrightarrow{OL}} = z_L - z_O = \dfrac{1}{2} - i$
$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -3 + i + 1 - 2i = -2 - i$

On a donc $\overrightarrow{OL}\left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; -1)$

Alors $\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{AC} = XX' + YY' = \dfrac{1}{2} \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0$

La médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

II Fonction exponentielle

Exercice X2 Fonction exponentielle

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable et sur $[0~;~+\infty[$:
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $]0~;~+\infty[$. Par ailleurs $g'(0) = 0$, ayant $g'(x) > 0$ sauf en une valeur isolée g est donc décroissante sur $[0~;~+\infty[$.
3. Donner le tableau de variations de g.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	0	$-$	
Variation de g	2 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$

1.
   - g est continue sur $\mathrm{I} = [0;+\infty[$ (elle est dérivable sur I) ;
   - g est strictement décroissante sur I ;
   - $g(0) = 2$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   donc g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;2]$.

   Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

2. La calculatrice donne :
   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   - $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
   - $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $1,27 < \alpha < 1,28$.
3. On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$ car $\alpha \neq 1$.

g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

- si $0 \leq x < \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$ soit $g(x) > 0$.
- $g(\alpha) = 0$
- si $x > \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$ soit $g(x) < 0$.

On a donc $g(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$; $g(\alpha) = 0$;
$g(x) < 0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable sur cet intervalle :
   $\mathrm{A}'(x) = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$.
   Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $\mathrm{A}'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la précédente question on a donc :
$A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
$A'(\alpha) = 0$;
$A' < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

2. On a donc :
$x \longmapsto A(x)$ est strictement croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

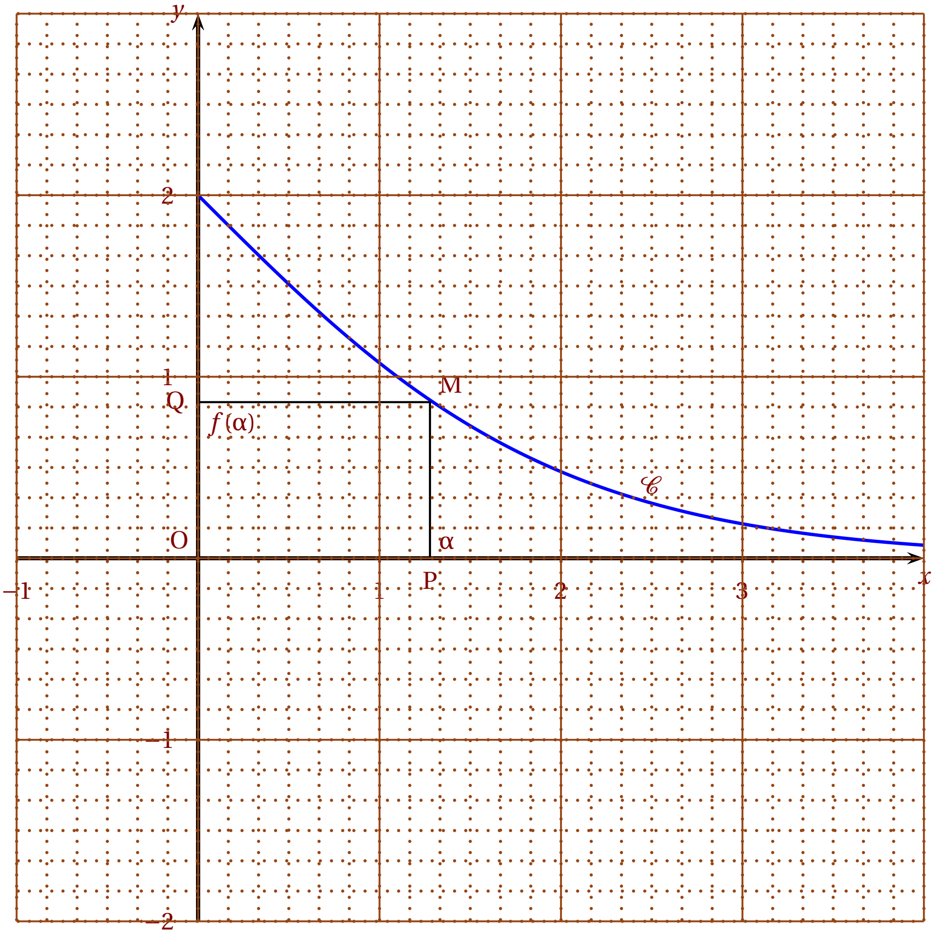
1. On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{e^x+1} = A(x)$.
Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{e^{\alpha}+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)}$.
Or on a vu que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :
$-\dfrac{4}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
La tangente en $M(\alpha\,;\,f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
Or $f'(x) = -\dfrac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$, donc
$f'(\alpha) = -\dfrac{4e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}+1\right)^2} = -\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4



III Probabilités

Exercice X3 Probabilités

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

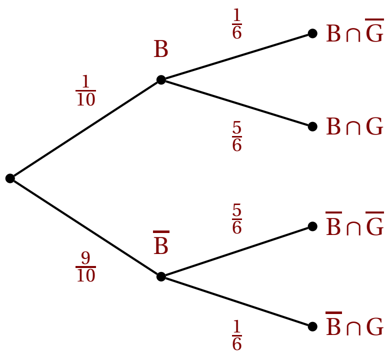
- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
Les jetons sont indiscernables au toucher et le dé est équilibré, le choix se fait au hasard, donc pour tout événement E, on a

$p(\mathrm{E}) = \dfrac{Card(\mathrm{E})}{Card(\Omega)}$.



Calculer la probabilité de l'événement G.
$\mathrm{G} = (\mathrm{B}\cap\mathrm{G}) \cup \left(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{G}\right)$.

La formule des probabilités totales donne $p(\mathrm{G}) = p\,(\mathrm{B}\cap\mathrm{G}) + p\left(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{G}\right) = p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{G}) + p(\overline{\mathrm{B}}) \times p_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{G})$

soit $p(\mathrm{G}) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

$$\boxed{p(\mathrm{G}) = \frac{7}{30}}$$

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

On veut calculer la probabilité conditionnelle $p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{G}})}{p(\overline{\mathrm{G}})} = \dfrac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}}$

$$\boxed{p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{46} \approx 0.022}$$

3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie).

On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
Succès : « le joueur gagne la partie » avec la probabilité $p = \frac{7}{30}$

Echec : « le joueur perd la partie » avec la probabilité $q = 1 - p = \frac{23}{30}$
On répète 4 fois cette expérience de façon indépendante et on considère la variable aléatoire N qui comptabilise le nombre de succès .
N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(4; \frac{7}{30}\right)$ de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{7}{30}$
Calculons la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donnons-en une valeur approchée à 10^{-3}, près.
Pour tout entier $k \in [0;4]$; on a :

$$p(\mathrm{N} = k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{7}{30}\right)^k \times \left(\frac{23}{30}\right)^{4-k}.$$

On veut $p(\mathrm{N}=2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(\frac{23}{30}\right)^2 \approx 0192$

$$\boxed{p(\mathrm{N}=2) \approx 0,192}$$

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Le joueur fait n parties de façon indépendante.

On répète n fois cette expérience de façon indépendante et on considère la variable aléatoire N qui comptabilise le nombre de succès .
N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \frac{7}{30}\right)$ de paramètre n et $p = \frac{7}{30}$
On veut alors le plus petit entier n qui vérifie $p(\mathrm{N} \geq 1) \geq 0,99$
Or $p(\mathrm{N} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{N} = 0) = 1 - \left(\dfrac{23}{30}\right)^n$

$$p(\mathrm{N} \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq \frac{1}{100}$$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,

$$p(\mathrm{N} \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right)^n \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right) \leq -2\ln 10$$

Comme $\dfrac{23}{30} < 1$, on déduit $\ln\left(\dfrac{23}{30}\right) < 0$, et donc en divisant par $\ln\left(\dfrac{23}{30}\right) < 0$:

$$p(\mathrm{N} \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\dfrac{23}{30}\right)}$$

Enfin $\dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\dfrac{23}{30}\right)} \approx 17.3$

Le joueur doit faire au moins 18 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99.

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
Les valeurs possibles de X sont 4, et 1.
$p(\mathrm{X}=4) = p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$
$p(\mathrm{X}=-1) = p(\overline{\mathrm{G}}) = 1 - \dfrac{7}{30} = \dfrac{23}{30}$
La loi de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	4	-1
p_i	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{23}{30}$

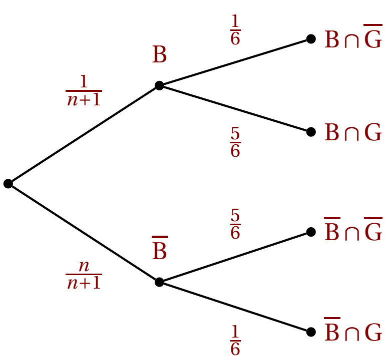
$$\mathrm{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 = 4 \times \dfrac{7}{30} + (-1) \times \dfrac{23}{30} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}17€}$$

b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E(X)} < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
$\mathrm{E(X)} > 0$, donc le jeu est défavorable à l'organisateur

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

On recommence le jeu de la question mais avec cette fois-ci n jetons noirs dans le sac,
ainsi dans le sac il y n jetons noirs et un jeton blanc.
La probabilité de tirer un jeton blanc est $p(\mathrm{B}) = \dfrac{Card(\mathrm{B})}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{n+1}$



$\mathrm{G} = (\mathrm{B}\cap\mathrm{G}) \cup \left(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{G}\right)$.

La formule des probabilités totales donne $p(\mathrm{G}) = p\,(\mathrm{B}\cap\mathrm{G}) + p\left(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{G}\right) = p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{G}) + p(\overline{\mathrm{B}}) \times p_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{G})$

soit $p(\mathrm{G}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5+n}{6(n+1)}$

$\boxed{p(\mathrm{G}) = \frac{n+5}{6n+6}}$

Donnons alors la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
Les valeurs possibles de X sont 4, et 1.
$p(\mathrm{X}=4) = p(\mathrm{G}) = \frac{n+5}{6n+6}$
$p(\mathrm{X}=-1) = p(\overline{\mathrm{G}}) = 1 - \frac{n+5}{6n+6} = \frac{5n+1}{6n+6}$
La loi de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	4	-1
p_i	$\frac{n+5}{6n+6}$	$\frac{5n+1}{6n+6}$

$$\mathrm{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 = 4\times\frac{n+5}{6n+6} + (-1)\times\frac{5n+1}{6n+6} = \frac{4(n+5)}{6n+6} - \frac{5n+1}{6n+6} = \frac{-n+19}{6n+6}$$

$\boxed{\mathrm{E(X)} = \frac{-n+19}{6n+6}\text{€}}$

Le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E(X)} < 0$.

$$\mathrm{E(X)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6n+6} < 0 \Leftrightarrow -n+19 < 0 \Leftrightarrow n > 19 \Leftrightarrow n \geq 20$$

donc le jeu est favorable à l'organisateur dès que le sac contient au moins 20 jetons noirs.

IV Suites

Exercice X4 Suites

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

✍ Limite en 0^+ :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to +\infty} \ln t = +\infty\end{array}\right\}$ Par composée $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

✍ Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{t\to 1} \ln t = \ln 1 = 0\end{array}\right\}$ Par composée $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x = -\infty\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$f = h + k$ où $h = \ln u$ donc $h' = \dfrac{u'}{u}$, comme ici $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, on déduit $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$,

et donc $h'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{x+1} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$

puis $f'(x) = h'(x) + k'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} - 1$ Signe de la dérivée : on travaille sur $]0; +\infty[$, ainsi $x > 0$ et $x + 1 > 0$, et donc $h'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, puis $h'(x) - 1 < 0$, soit $f'(x) < 0$

La fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖		$-$		
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

- f est continue sur $\mathrm{I} =]0; +\infty[$ (elle est dérivable sur I) ;
- f est strictement décroissante sur I ;
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

donc f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$f(0,80) \approx 0,01$ et $f(0,81) \approx -0,006$

$$f(0,81) < 0 < f(0,80)$$
$$f(0,81) < f(\alpha) < f(0,80)$$
$$0,81 > \alpha > 0,80$$

en effet f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$0,80$ est donc une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

On a représenté en **annexe (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
Aucune justification n'est demandée.

✎ Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. » NON
En effet, on voit sur le graphique : $u_1 < u_3 < u_5 < u_4 < u_2 < u_0$

✎ Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. » OUI,
en effet $u_1 = g(u_0) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_0}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{1,5}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,51$
Au vu du graphique on conjecture pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq u_1 \geq 0,5$

Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. » NON
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

Bonus : Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$.

On utilise le théorème ci-dessous :

> **Propriété X1 :**
> Soit une suite $(u_n)_n$ appartenant à un intervalle I définie par son premier terme et la relation de récurrence
>
> $$u_{n+1} = g(u_n),$$
>
> où g est une fonction continue sur I.
> Si (u_n) converge vers un réel l de I alors l vérifie $g(l) = l$. (l est un point fixe de g)

Ici (u_n) est une suite de nombres réels de $]0;+\infty[$, intervalle où g est continue, car dérivable. On admet par ailleurs que (u_n) est convergente vers un réel ℓ de $]0;+\infty[$.
alors ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$.
$g(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$

d) Montrer que $\ell = \alpha$.

D'après la question 1 , $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$
En effet l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique le réel α.

$$\boxed{\ell = \alpha.}$$

Voici un algorithme :

Variables : p et n sont des entiers naturels.
u est un réel.
Entrées : Entrée : Saisir p (p entier naturel)
Initialisation(s)
  n prend la valeur 0
  u prend la valeur 1,5

début
  Tant que $|g(u) - u| > 10^{-p}$ faire
  n prend la valeur $n+1$.
  u prend la valeur $g(u)$
  Fin de Tant que
fin
retourner n.

Faire fonctionner cet algorithme avec $p = 1$ en exécutant toutes les instructions et en écrivant les résultats les uns sous les autres.

Voici l'algorithme écrit sous XCAS :

$\boxed{1}$

```
g:=x->ln(1+1/x);
saisir("p un entier naturel ",p);
n:=0;
u:=1.5;
tantque abs(g(u)-u)>10^(-p)
faire
n:=n+1;
```

```
u:=g(u);
ftantque;
afficher(n);
```

// Success
// End defining g
n :6
Evaluation time : 2.684

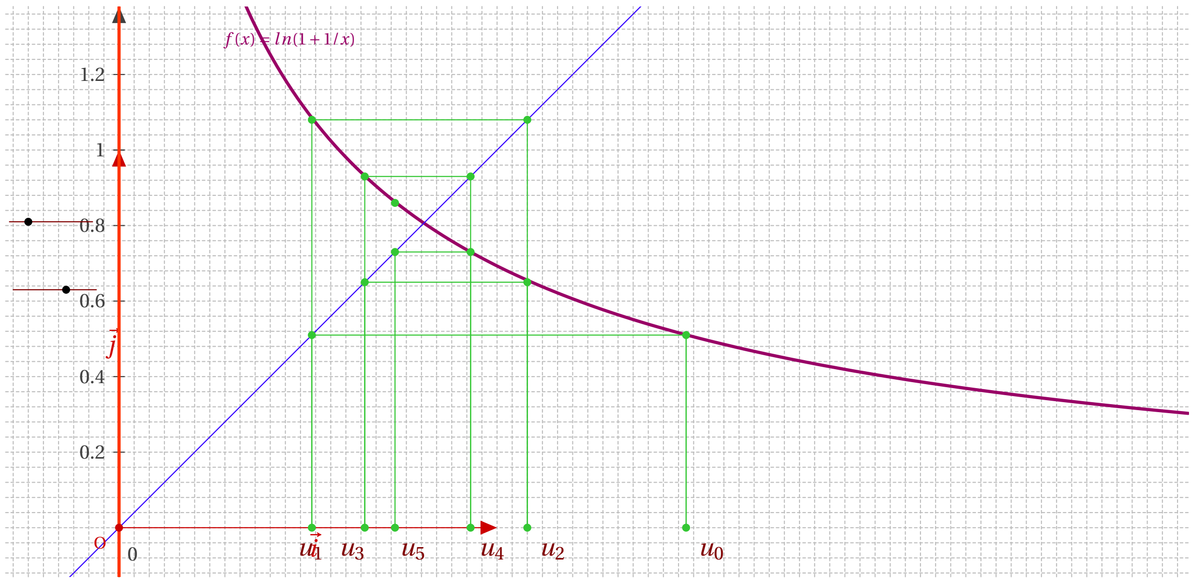
Suite des résultats , écrits les uns sous les autres

n :=0 ;
u :=1.5 ;
n :=1
g(u) :=0.510825623766
abs(g(u)-u) :=0.989174376234
n :=2
u :=0.510825623766
g(u) :=1.0843832642
abs(g(u)-u) :=0.573557640434
n :3
u :=1.0843832642
g(u) :=0.653461609659
abs(g(u)-u) :=0.430921654541
n :4
u :=0.653461609659
g(u) :=0.92834252893
abs(g(u)-u) :=0.27488091927
n :5
u :=0.27488091927
g(u) :=0.73101535049
abs(g(u)-u) :=0.197327178439
n :6
u :=0.73101535049
g(u) :=0.862028964295
abs(g(u)-u) :=0.131013613805
L'algorithme s'arrête à n :=6 car pour n :=7, on a abs(g(u)-u) :=0.0918958224728<0,1
la dernière ligne sera : affichage $n = 6$ car $|u_7 - u_6| < 0,1$; avec XCAS on trouve $|u_7 - u_6| \approx 0,092$
Que peut-on dire de l'amplitude de l'encadrement de α que permet d'obtenir la valeur de n affichée par cet algorithme ?

On obtient la plus petite valeur de n telle que l'amplitude de l'encadrement de α par u_n et u_{n+1} soit inférieure à 10^{-p}.

ANNEXE de l'exercice 4 : à rendre avec la copie

NOM,CLASSE : ....



$f(x) = ln(1 + 1/x)$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
O
$\vec{j}$
$\vec{i}$
u_1
u_3
u_5
u_4
u_2
u_0