1 Fonction

Exercice 1 Étude d'une fraction rationnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$$

f est une fraction rationnelle, donc est dérivable sur son ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$;
en effet pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$, donc $x^2+1 \geq 1$
$f = \dfrac{u}{v}$, donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Ici $\begin{cases} u(x) & = x^3 - 2x^2 \\ v(x) & = x^2+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) & = 3x^2 - 4x \\ v'(x) & = 2x \end{cases}$
On a ainsi $f'(x) = \dfrac{(3x^2-4x)(x^2+1) - 2x(x^3-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4+3x^2-4x^3-4x}{(x^2+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{3x^4-4x^3+3x^2-4x-2x^4+4x^3}{(x^2+1)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}.}$$

2. Conjecturer une racine de x^3+3x-4 et valider la conjecture. Factoriser cette expression pour $x \in \mathbb{R}$. (théorèmes de factorisation et d'identification)
En traçant la courbe représentative de la fonction $P : x \mapsto x^3+3x-4$; on conjecture que P a pour racine 1 .
On utilise la propriété :

Propriété

Soit P un polynôme de degré n tel que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha) \times Q(x)$.

Comme $P(1) = 0$, on peut affirmer que le polynôme P se factorise par $(x-1)$; il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout x on ait :

$$P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$$
$$P(x) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$
$$P(x) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)-c$$
$$\text{Or } P(x) = x^3+3x-4$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients, donc en identifiant, il vient :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b-a & = 0 \\ c-b & = 3 \\ -c & = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = a = 1 \\ c & = b+3 = 4 \\ c & = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x^2+x+4) \text{ et } f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}.}$$

3. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.

✎ Déjà pour tout réel x; on a $(x^2+1)^2 > 0$

✎ Signe du trinôme (x^2+x+4)
$\Delta = 1 - 16 = -15$; comme $\Delta < 0$, le trinôme a le signe de $a = 1$ sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel x; on a $(x^2+x+4) > 0$

Ceci prouve que $f'(x)$ a le signe de $x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Déterminer a,b,c,d réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+1)+(cx+d)}{x^2+1}$$
$$f(x) = \frac{ax^3+ax+bx^2+b+cx+d}{x^2+1}$$
$$f(x) = \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{x^2+1}$$
$$\text{Or } f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$$

Donc en identifiant les coefficients des polynômes au numérateur, il vient :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b & = -2 \\ a+c & = 0 \\ b+d & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -2 \\ c & = -a = -1 \\ d & = -b = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x - 2 + \frac{-x+2}{x^2+1}.}$$

5. Étudier le signe de $f(x) - x + 2$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

$f(x) - x + 2 = x - 2 + \dfrac{-x+2}{x^2+1} - x + 2 = \dfrac{-x+2}{x^2+1}$

Pour tout réel x ; $x^2 + 1 > 0$ donc $f(x) - x + 2$ a le signe de $-x + 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-x+2$		$+$	0	$-$	

- ✍ $f(x) - x + 2 = 0 \iff x = 2$; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point d'intersection d'abscisse 2
- ✍ $f(x) - x + 2 > 0 \iff y_{\mathcal{C}} - y_{\mathcal{D}} > 0 \iff x < 2$
  La courbe $\mathcal{C}$ est située au dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;2[$
- ✍ $f(x) - x + 2 < 0 \iff y_{\mathcal{C}} - y_{\mathcal{D}} < 0 \iff x > 2$
  La courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]2;+\infty[$

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   On résout l'équation $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2+1} = 0 \iff x^3 - 2x^2 = 0 \iff x^2(x-2) = 0$
   $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

   La courbe $\mathcal{C}$ rencontre l'axe des abscisses au point O$(0;0)$ et A$(2;0)$.

7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   On calcule $f(0) = 0$

   La courbe $\mathcal{C}$ rencontre l'axe des ordonnées au point O$(0;0)$.

8. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe, au point d'abscisse -1.
   $\mathcal{T} : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
   On a vu que $f'(x) = \dfrac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$
   Ainsi $f'(-1) = \dfrac{-1(-1-3-4)}{2^2} = 2$ et $f(-1) = \dfrac{-1-2}{1+1} = -\dfrac{3}{2}$
   Ainsi $\mathcal{T} : y = 2(x+1) - \dfrac{3}{2}$

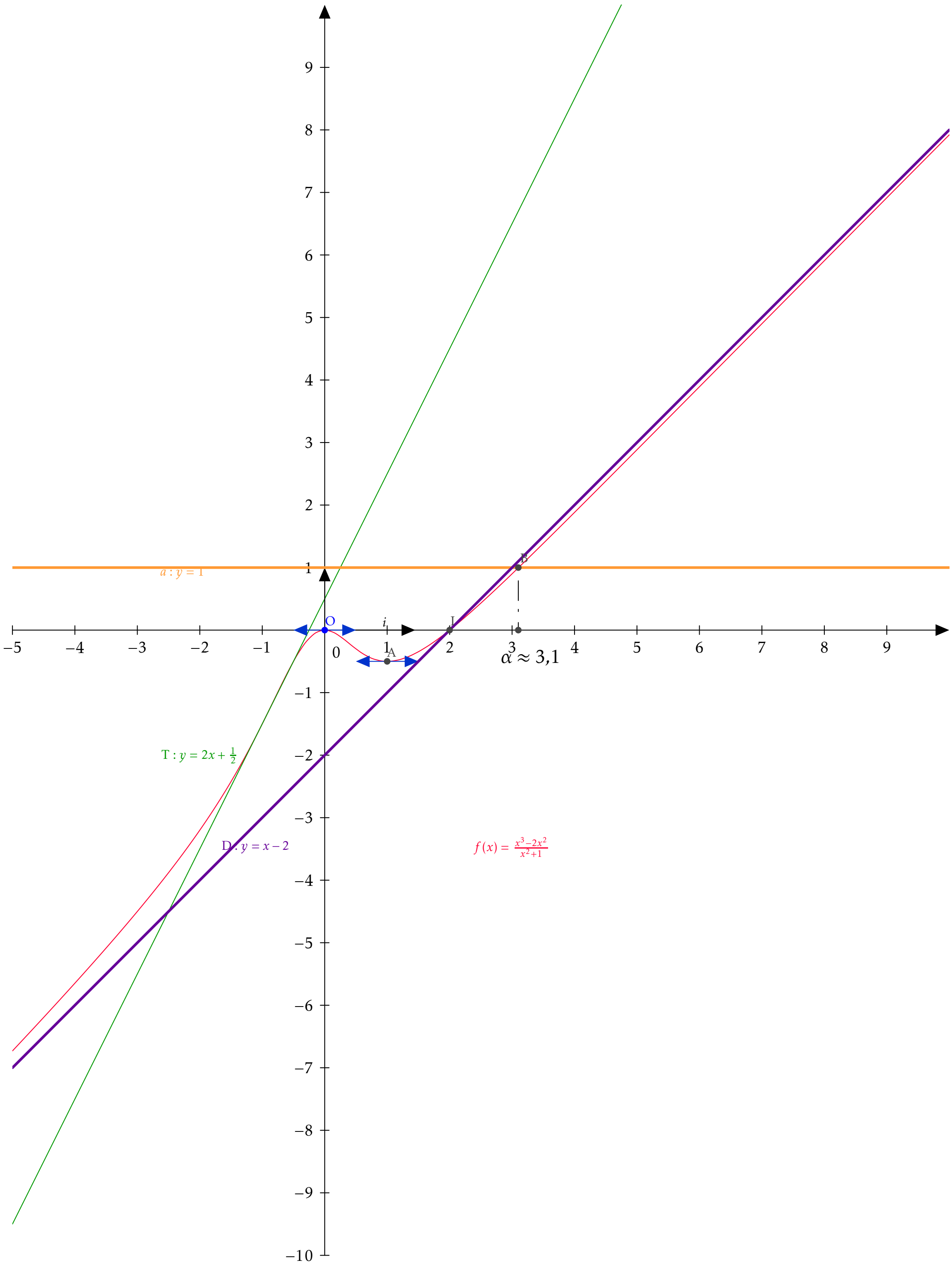
   $$\mathcal{T} : y = 2x + \frac{1}{2}$$

9. Représenter soigneusement $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes, les tangentes horizontales de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ elle même.
10. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
    - Sur $]-\infty;1]$; f présente un maximum absolu en 0 qui vaut 0,
      Donc pour tout réel x de $]-\infty;1]$; on a $f(x) \leq 0$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur $]\infty;1]$.
    - Sur $[1;+\infty[$:
      - ★ f est continue car dérivable sur $[1;+\infty[$;
      - ★ f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$;

      donc f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[f(1); \lim\limits_{x \to +\infty}[$; soit sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
      Comme $1 \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$; l'équation $f(x) = 1$ a une racine unique α dans $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
      Encadrement de α à à 10^{-3} près : déjà $f(x) = 1 \iff f(x) - 1 = 0$;
      on saisit donc la fonction $g : x \mapsto f(x) - 1$, sur la calculatrice et on obtient par exemple à l'aide du balayage :
      - $g(3{,}103) \approx -0.008$
      - $g(3{,}104) \approx 0.002$

      $$g(3{,}103) < 0 < g(3{,}104)$$
      $$g(3{,}103) < g(\alpha) < g(3{,}104)$$
      $$3{,}103) < \alpha < 3{,}104 \text{ car } g = f - 1 \text{ est strictement croissante sur } \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$$

      3,103 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.



2 Un algorithme ?

Exercice 2 Méthode de Héron

L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples (divisions, sommes, produits).

Soit $a \in [1;+\infty[$ et f la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}+x\right)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [\sqrt{a};a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   f est une fraction rationnelle donc est dérivable sur son ensemble de définition :

comme $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2} \times \frac{1}{x}$; on obtient

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x^2}.}$$

x	0		$\sqrt{a}$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ \sqrt{a} + \sqrt{a}\Big) = \sqrt{a}$$

$$f(a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$$

En déduire : pour $x \in [\sqrt{a}; a]$, $f(x) \in [\sqrt{a}; a]$.
Comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, on a :

$$\text{si } \sqrt{a} \leq x \leq a$$

$$\text{alors } f\left(\sqrt{a}\right) \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\text{soit } \sqrt{a} \leq f(x) \leq a$$

Ainsi pour $x \in [\sqrt{a}; a]$, $f(x) \in [\sqrt{a}; a]$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}; a]$. (on a ainsi prouvé que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie)
On note $P(n)$ la propriété : $u_n \in [\sqrt{a}; a]$.
   - Initialisation :Au rang 0; on a $u_0 = a$ et comme $a \in [1; +[$; on a $\sqrt{a} \leq a$, ainsi on a bien $\sqrt{a} \leq u_0 \leq a$, ce qui prouve que $P(0)$ est vrai.
   - Hérédité :Soit $p \geq 0$, on suppose que : $u_k \in [\sqrt{a}; a]$
     On doit prouver que : $u_{k+1} \in [\sqrt{a}; a]$
     En partant de (HR) : $\sqrt{a} \leq u_k \leq a$ appliquant la fonction f strictement croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$:

$$f\left(\sqrt{a}\right) \leq f(u_k) \leq f(a)$$

$$\text{Soit } \sqrt{a} \leq u_{k+1} \leq a$$

$$\text{Ainsi } u_{k+1} \in [\sqrt{a}; a]$$

   - Conclusion :La propriété est vraie au rang 0, pour $k \geq 0$ $P(k)$ vraie entraîne $P(k+1)$ vraie,le principe de récurrence s'applique et donc pour tout $n \geq 0 : n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}; a]$

4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.
On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} + u_n\right) - u_n = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \frac{2u_n^2}{2u_n} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$
   - ⋆ Pour tout entier n on a $u_n \in [\sqrt{a}; a]$ donc $u_n \geq \sqrt{a}$ d'où on déduit $\sqrt{a} - u_n \leq 0$
   - ⋆ Par ailleurs comme $u_n \geq \sqrt{a} > 0$; on déduit $u_n + \sqrt{a} \geq 0$;
     On a donc pour tout entier n :

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{a} - u_n \leq & 0 \\ \sqrt{a} + u_n \geq & 0 \\ 2u_n > & 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n} \geq 0$$

pour tout entier n; $u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Par ailleurs comme pour tout entier n on a $u_n \in [\sqrt{a}; a]$ la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$;
or toute suite décroissante minorée est convergente
donc la suite (u_n) est convergente vers ne limite ℓ.

5. **Démontrer** que ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell}+\ell\right)$. En déduire ℓ.
   Comme (u_n) converge vers ℓ ; et comme $\sqrt{a} \leq u_n \leq a$
   par passage à la limite dans les inégalités on obtient : $\sqrt{a} \leq \ell \leq a$
   Par ailleurs f est une fraction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition, ici $]0;+\infty[$, or toute fonction dérivable est continue, ainsi on a prouvé que la fonction f est continue en $\ell \in [a;\sqrt{a}]$.
   Par ailleurs comme
   $$\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{array}\right\} \text{donc } f(u_n) \to f(\ell)\ (1)$$
   Or comme $u_n \to \ell$, on déduit $u_{n+1} \to \ell$ (2) ;
   De (1) et (2) et du théorème sur l'unicité de la limite on déduit $\ell = f(\ell)$; soit :
   $$\boxed{\ell \text{ vérifie } \ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell}+\ell\right)}$$
   On résout $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell}+\ell\right) \Longleftrightarrow 2\ell = \frac{a}{\ell}+\ell \Longleftrightarrow \ell = \frac{a}{\ell}$
   soit $\ell^2 = a \Longleftrightarrow \ell = \pm\sqrt{a}$
   Mais on a montré que $\ell \in [\sqrt{a};a]$;
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}}$$
6. Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction. À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2}$?

   ✍ $u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_0}+u_0\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$

   ✍ $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_1}+u_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$

   ✍ $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_2}+u_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{17}+\frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$

   A l'aide d'une calculatrice on obtient $u_3 - \sqrt{2} \approx 0.000002$; ainsi u_3 fournit 5 décimales exactes de $\sqrt{2}$!
7. dans cette question on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n).
   On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$.
   On suppose que u_0 approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leq v_0 \leq 0{,}5$.

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leq v_n^2$.
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}$$
   $$v_{n+1} = \frac{u_n^2+a}{2u_n} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + \sqrt{a}^2}{2u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n} = \frac{v_n^2}{2u_n}$$
   $$\boxed{v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}}$$
   b) Par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n < \frac{1}{2^{2^n}}$

   On note Q(n) la propriété $0 \leq v_n < \frac{1}{2^{2^n}}$

   ✏ Initialisation :Au rang 0 ; on a $v_0 = u_0 - \sqrt{2}$ et comme $0 \leq v_0 \leq 0{,}5$; on a par ailleurs $\frac{1}{2^{2^0}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, ainsi on a bien $0 \leq v_0 < \frac{1}{2^{2^0}}$, ce qui prouve que Q(0) est vrai.

   ✏ Hérédité :Soit $p \geq 0$, on suppose que : $0 \leq v_p < \frac{1}{2^{2^p}}$

   On doit prouver que : $0 \leq v_{p+1} < \frac{1}{2^{2^{p+1}}}$

   En partant de (HR) : $0 \leq v_p < \frac{1}{2^{2^p}}$ en appliquant la fonction $x \mapsto x^2$ strictement croissante sur $[0;+\infty[$:
   $$0 \leq v_p^2 < \left(\frac{1}{2^{2^p}}\right)^2$$
   $$\text{Or } \left(\frac{1}{2^{2^p}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2^p}} \times \frac{1}{2^{2^p}} = \frac{1}{2^{2^p+2^p}} = \frac{1}{2^{2\times 2^p}} = \frac{1}{2^{2^{p+1}}}$$

$$\text{Ainsi , comme } v_{p+1} \leq v_p^2$$
$$\text{On a } v_{p+1} \leq \frac{1}{2^{2^{p+1}}}$$

✏ Conclusion :La propriété est vraie au rang 0, pour $p \geq 0$ Q(p) vraie entraîne Q($p+1$) vraie,le principe de récurrence s'applique et donc pour tout $n \geq 0 : n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n < \frac{1}{2^{2^n}}$

c) En déduire $v_4 < 10^{-4}$.

D'après la question précédente, on a :

$$v_4 < \frac{1}{2^{2^4}}$$
$$v_4 < \frac{1}{2^{16}} \leq \frac{1}{65\,536} \leq \frac{1}{10\,000}$$

On a $v_4 < 10^{-4}$.

À partir de quel rang n peut-on dire la suite (u_n) approche $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?
On cherche un rang n tel que $\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000}$:

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff 2^{2^n} \geq 10^{1\,000} \text{ car la fonction inverse est strictement décroissante sur}]0;+\infty[$$

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff \ln\left(2^{2^n}\right) \geq \ln\left(10^{1\,000}\right) \text{ car la fonction ln est strictement croissante sur}]0;+\infty[$$

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff 2^n \ln(2) \geq 1\,000 \ln(10) \text{ car } \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff 2^n \geq \frac{1\,000 \ln(10)}{\ln(2)} \text{ car } \ln(2) > 0$$

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{1\,000 \ln(10)}{\ln(2)}\right) \text{ car la fonction ln est strictement croissante sur}]0;+\infty[$$

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-1\,000} \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1\,000 \ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln 2} \text{ car } \ln 2 > 0$$

Comme $\frac{\ln\left(\frac{1\,000 \ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln 2} \approx 11.69$, donc

u_{12} fournira une valeur approchée de $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales !