Devoir en temps libre n ° I : Récurrence,Suites

TS3 Le corrigé

TS3 2014

Un petit DM pour commencer ...

Exercice 1 Une équation

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^3+2x-1=(x^2+x-1)(1-x)$, puis résoudre $-x^3+2x-1=0$.
En développant, il vient : $(x^2+x-1)(1-x)=x^2+x-1-x^3-x^2+x=-x^3+2x-1$
$-x^3+2x-1=0 \Longleftrightarrow (x^2+x-1)(1-x)=0$
En utilisant la règle du produit nul $\cdots$
$-x^3+2x-1=0 \Longleftrightarrow (x^2+x-1)=0$ ou $(1-x)=0$
$-x^3+2x-1=0 \Longleftrightarrow (x^2+x-1)=0$ ou $x=1$
Le trinôme x^2+x-1 a pour discriminant $\Delta=1+4=5$
Donc ce dernier a deux racines $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

L'équation $-x^3+2x-1=0$ a pour ensemble de solution $S=\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\}$

Exercice 2 Une inégalité

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x)=x^3+x^2-x-1$.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour $x\in[-10;10]$.
   f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :
   $$f'(x)=3x^2+2x-1$$
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations complet de f.
   Signe de la dérivée :
   - $f'(x)=0 \Longleftrightarrow 3x^2+2x-1=0$
     $\Delta=4+12=16=4^2$
     $f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{-2-4}{6}=-1$
   - $f'(x)$ est un trinôme donc a le signe de $a=3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Tableau de variations de f :

x	-10		-1		$\frac{1}{3}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-891	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	1089

3. En déduire le tableau de signes de $f(x)$. Résoudre l'inéquation $f(x)\geq 0$.
   - Résolvons $f(x)=0$
     soit on remarque que $f(x)=0$ a deux solutions évidentes -1 et 1 à l'aide d'une calculatrice,
     soit on remarque que -1 est racine avec le tableau de variation et on factorise par $(x+1)$.
     $f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$
     or $f(x)=x^3+x^2-x-1$, en identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a & =1 \\ a+b & =1 \\ b+c & =-1 \\ c & =-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & =1 \\ b & =0 \\ c & =-1 \end{cases}$$

On a ainsi la factorisation $f(x) = (x+1)(x^2-1)$

✍ On obtient à l'aide du tableau de variation le tableau de signes de $f(x)$

x	-10		-1		1		10
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi étudier le signe de $f(x)$ à l'aide de la factorisation $f(x) = (x+1)(x^2-1)$

x	-10		-1		$\frac{1}{3}$		10
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
(x^2-1)		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est donc $\mathcal{S} = [1;10] \cup \{-1\}$

Exercice 3 Position relative de deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 2x^2 \quad ; \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ les courbes respectives de g et h dans le repère précédent.

1. Factoriser $g(x) - h(x)$ puis dresser le tableau de signes de cette expression.
   $g(x) - h(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

   $g(x) - h(x) = x(x-1)^2$

   On peut donc étudier le signe de $g(x) - h(x)$

x	-10		0		1		10
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$g(x) - h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Donner l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient :
   $g(x) - h(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

   $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont deux points d'intersection $\text{O}(0;0)$ et $\text{A}(1;-1)$

3. Décrire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   - ✍ D'après la question précédente, $g(x) - h(x) \geq 0 \iff x \geq 0$
     donc $y_{\mathcal{C}} - y_{\mathcal{D}}$ sur $[0;10]$.
     La courbe $\mathcal{C}$ est donc située au dessus de $\mathcal{D}$ sur $[0;10]$.
   - ✍ de même la courbe $\mathcal{C}$ est située strictement en dessous de $\mathcal{D}$ sur $[-10;0[$.

Exercice 4 Récurrence ...

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

   notons $\text{R}(n)$ la propriété $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$:

- Initialisation :Au rang 1; on a $1\times 2=2$ et $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}=2$; ainsi R(1) est vraie.
- Hérédité :Soit $p\geq 1$, on suppose que : $1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)=\dfrac{p(p+1)(p+2)}{3}$
  On doit prouver que : $1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=\dfrac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$
  En ajoutant $(p+1)\times(p+2)$ de part et d'autre dans (HR), on obtient :

$$1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=\frac{p(p+1)(p+2)}{3}+(p+1)\times(p+2)$$

$$\text{soit } 1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=(p+1)\left[\frac{p(p+2)}{3}+(p+2)\right]$$

$$\text{soit } 1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=(p+1)\left[\frac{p^2+2p}{3}+\frac{3p+6}{3}\right]$$

$$\text{soit } 1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=(p+1)\left[\frac{p^2+5p+6}{3}\right]$$

  Il reste à voir que $(p+2)(p+3)=p^2+2p+3p+6=p^2+5p+6$

$$\text{Ainsi } 1\times 2+2\times 3+\cdots+p\times(p+1)+(p+1)\times(p+2)=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$$

- Conclusion :La propriété est vraie au rang 1, pour $p\geq 1$ R(p) vraie entraîne R($p+1$) vraie,le principe de récurrence s'applique et donc pour tout $n\geq 1$: $1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2. Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 3^{n+6}-3^n \text{ est divisible par 7.}$$

Notons Q(n) la propriété :$3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7.

- Initialisation : $3^6-3^0=728=7\times 104$ donc 3^6-3^0 est divisible par 7, ce qui prouve que Q(0) est vraie.
- Hérédité : soit $k\geq 0$, un entier fixé on suppose que $3^{k+6}-3^k$ est divisible par 7 (HR);
  on veut prouver que $3^{k+7}-3^{k+1}$ est divisible par 7;
  D'après (HR) on sait qu'il existe un entier p tel que $3^{k+6}-3^k=7p$
  or $3^{k+7}-3^{k+1}=3\left(3^{k+6}-3^k\right)=3\times 7p=7\times 3p$
  Comme p est un entier $3p$ est bien un entier , ainsi $3^{k+7}-3^{k+1}$ est bien divisible par 7. ce qui prouve l'hérédité
- Conclusion :La propriété est vraie au rang 0,pour $k\geq 0$ Q(k) vraie entraîne Q($k+1$) vraie,le principe de récurrence s'applique et donc pour tout $n\geq 0$: $3^{n+6}-3^n$ est un multiple de 7.