Devoir surveillé n° X : Bac Blanc
TS Février 2014

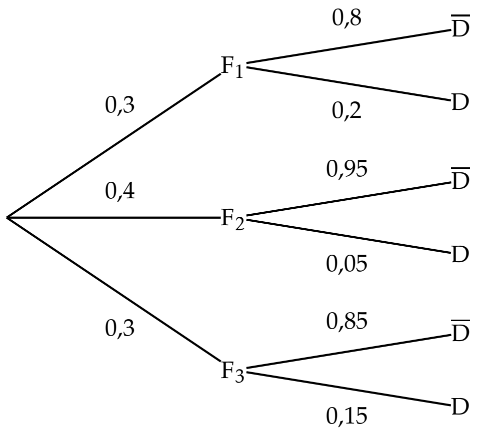
TS 2014

Probabilités

Exercice 1 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a*) F_1 désigne l'évènement : « le pneu provient du fournisseur 1 ».
D désigne l'évènement : « le pneu présente un défaut ».
On a l'arbre suivant :



D'après le théorème des probabilités totales :
$p\left(\overline{D}\right) = p\left(F_1 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_2 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_3 \cap \overline{D}\right)$ soit
$p\left(\overline{D}\right) = 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,24 + 0,38 + 0,255 = 0,875.$

$$\boxed{p\left(\overline{D}\right) = 0,875.}$$

On a $p_{\overline{D}}(F_2) = \dfrac{p\left(\overline{D} \cap F_2\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,95}{0,875} = \dfrac{0,38}{0,875} \approx 0,434.$

$$\boxed{p_{\overline{D}}(F_2) \approx 0,434.}$$

2. L'expérience qui consiste à tester un pneu est une épreuve de Bernoulli.
On appelle S l'événement « Le pneu présente un défaut ».
Alors $p(S) = 1 - 0,875 = 0,125$. Les tests sont indépendants, donc constituent un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire donnant le nombre de pneus ayant un défaut suit une loi binomiale de probabilité $p = 0,125$ avec $n = 10$.

$$\boxed{\text{D suit donc la loi binomiale } \mathcal{B}(10;0,125).}$$

La probabilité cherchée est donc égale à :

$$p(D \leqslant 1) = p(D = 0) + p(D = 1) = 0,125^0 \times 0,875^{10} + \binom{10}{1} \times 0,125^1 \times 0,875^9 = 0,875^{10} + 10 \times 0,125 \times 0,875^9 \approx 0,6388 \approx 0,639$$

au millième près

$$\boxed{p(D \leqslant 1) \approx 0,639 \text{ au millième près.}}$$

3. *a*) On a $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx - \int_0^{500} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_{500}^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} = -e^{-1000\lambda} - \left(-e^{-500\lambda}\right) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}.$

$$\boxed{p(500 \leqslant X \leqslant 1000)e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}.}$$

b) On pourra résoudre d'abord l'équation $u - u^2 = \dfrac{1}{4}$.

$$u - u^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow u^2 - u + \frac{1}{4} = 0 \Longleftrightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow u - \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow u = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{u - u^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow u = \frac{1}{2}.}$$

On a donc $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \dfrac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \dfrac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - \left(e^{-500\lambda}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$.

En posant $u = e^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit $u - u^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \iff u = \dfrac{1}{2}$. Il reste à résoudre :

$e^{-500\lambda} = \dfrac{1}{2}$ soit en appliquant la fonction ln, $-500\lambda = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff -500\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{500} \approx 0{,}001\,38 \approx 0{,}001\,4$.

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{500} \approx 0{,}001\,38 \approx 0{,}001\,4.}$$

Suites

Exercice 2 5 points

1. – $u_2 = \dfrac{1+1}{2\times 1}u_1 = \dfrac{1}{2}$
   – $u_3 = \dfrac{2+1}{2\times 2}u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$
   – $u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 3}u_3 = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

2. *a)* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.
   On note P(n) la propriété : $u_n > 0$.
   – **Initialisation.** $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.
   – **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul on a $u_k > 0$, alors, comme $\dfrac{k+1}{2k} > 0$, on a $\dfrac{k+1}{2k}u_k > 0$, c'est-à-dire
   $u_{k+1} > 0$, et la propriété est donc héréditaire.
   – **Conclusion.** Le théorème de récurrence s'applique et donc pour tout entier naturel n non nul : $u_n > 0$.

   $$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } u_n > 0.}$$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n+1}{n+n} \leqslant 1$.
   Ou $n \geq 1$ donc en ajoutant n de part et d'autre $n + n \geq n + 1$, ainsi en divisant par $2n > 0$
   $\dfrac{n+1}{2n} \leq 1$.
   On a donc pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

   $$\boxed{\text{Comme } u_n > 0 \text{ on en déduit que } u_{n+1} \leqslant u_n \text{ et donc que la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

   c) La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
   En effet toute suite décroissante minorée est convergente d'après le théorème de la convergence monotone.

3. *a)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n}u_n = \dfrac{1}{2}v_n$.

   $$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_1 = u_1 = \frac{1}{2}.}$$

   b) D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = q^{n-1}v_1$
   $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^n}$,

   $$\boxed{v_n = \frac{1}{2^n}.}$$

   on en déduit, comme $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, que $u_n = nv_n$

   $$\boxed{\text{Ainsi } u_n = \frac{n}{2^n}.}$$

4. *a)* On peut écrire, pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$: $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \ln 2\right)$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées),

   donc $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - \ln 2 = -\ln 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\ln u_n = \ln\left(\frac{n}{2^n}\right) = \ln n - \ln(2^n) = \ln n - n\ln 2 = f(n)$.
On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$, puis, par application de la fonction exponentielle et de la limite d'une composée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque. On aurait pu déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) dès la question 2 c. En effet la relation $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \frac{1}{2}\ell$ et donc que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

5. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :
    n est un nombre entier naturel
    u est un nombre réel
Initialisations :
    Affecter à n la valeur 1
    Affecter à u la valeur 0,5
Traitement :
    Tant que n < 10
        Affecter à u la valeur (n+1)/(2n) × u
        Affecter à n la valeur n + 1
    Fin Tant que
Sortie :
    Afficher u
```

a) Cet algorithme calcule les termes successifs de la suite (u_n) et affiche u_{10}.

b) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $0 < u_n < 10^{-2}$.

```
Variables :
    n est un nombre entier naturel
    u est un nombre réel
Initialisations :
    Affecter à n la valeur 1
    Affecter à u la valeur 0,5
Traitement :
    Tant que u ≥ 10^-2
        Affecter à u la valeur (n+1)/(2n) × u
        Affecter à n la valeur n + 1
    Fin Tant que
Sortie :
    Afficher n − 1
```

En bonus, les deux algorithmes en langage Scilab :

Algo 1

```
n=1
u=0.5
while n<10
u=(n+1)/(2*n)*u
n=n+1
end
afficher(u)
```

Algo 2

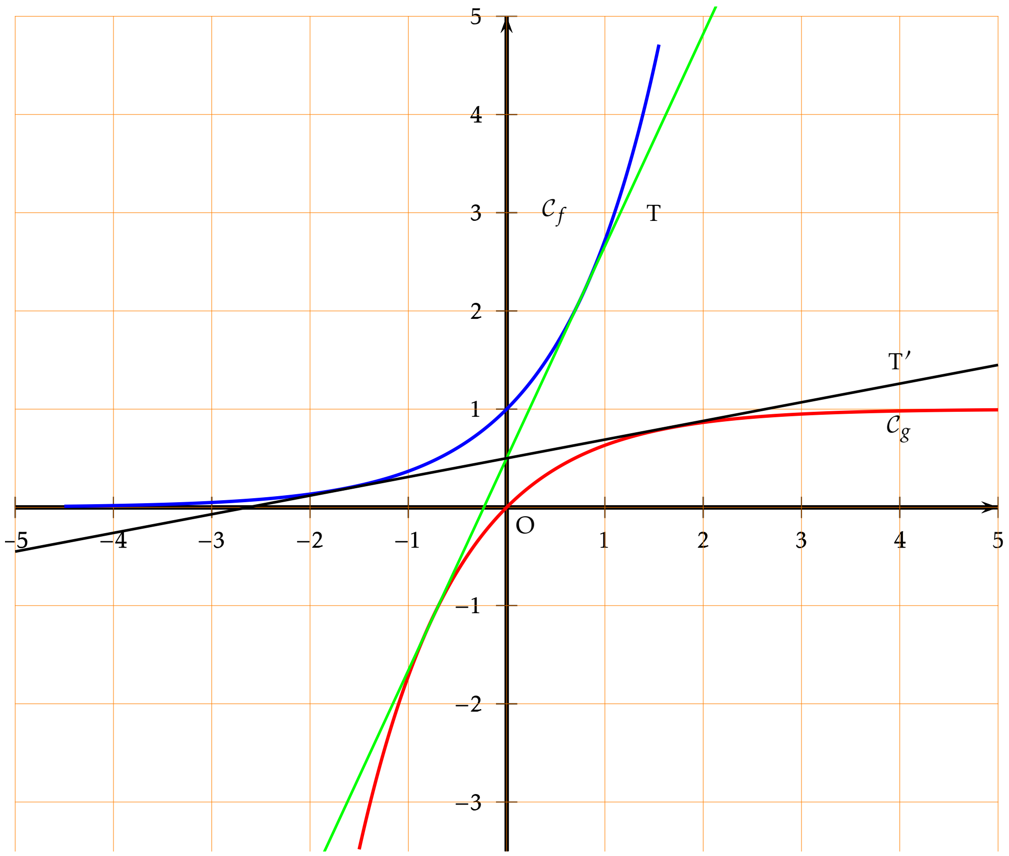
```
n=1
u=0.5
while u>=0.01
u=(n+1)/(2*n)*u
n=n+1
end
afficher(n-1)
```

Fonction exponentielle

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Partie A



Partie B

1. *a)* Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$,

   donc $f'(a) = \mathrm{e}^a$.

   b) De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x})$,

   donc $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$.

   c) Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
   $f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ et appliquant la fonction logarithme népérien : $a = -b \iff b = -a$.

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :
$y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a) \iff y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)$.
Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :
$y - \left(1-\mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) \iff y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}$.
Ou en remplaçant $-b$ par a :
$y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \iff y = x\mathrm{e}^a + 1 + \mathrm{e}^a(a-1)$.
Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :
$\mathrm{e}^a(1-a) = 1 + \mathrm{e}^a(a-1) \iff \mathrm{e}^a(2-2a) = 1 \iff 2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.
Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. *a*) Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 1$.
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limite :
$\lim\limits_{xto-\infty} \varphi(x) = 1$.
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ.
On a $\lim\limits_{xto+\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

   b) Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\varphi'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x$.
Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x. Donc sur $]-\infty\ ;\ 0[, \varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

   c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\varphi(0) = -2e^0 + 1 = -1$$

2. *a*) En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty;0]$:
   - φ est continue sur $\mathrm{I} =]-\infty;0]$ (elle est dérivable sur I) ;
   - φ est strictement décroissante sur I ;
   - $\varphi(0) = -1$;
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$.

   donc φ réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur $[-1;1[$. Comme $0 \in [-1;1[$ l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β dans I

   Ainsi l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β dans I

   $\varphi(-1{,}68) \approx 0{,}001$ et $\varphi(-1{,}67) \approx -0{,}005$
   Ainsi $\varphi(-1{,}67) < \varphi(\beta) < \varphi(-1{,}68)$, comme φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$; on déduit : $-1{,}68 \leqslant \beta \leqslant -1{,}67$

   $\beta \approx -1{,}67$

   Détaillons la démarche !

   La calculatrice donne successivement :
   $\varphi(-2) \approx 0{,}18$ et $\varphi(-1) \approx -0{,}47$, donc $-2 < \beta < -1$;
   $\varphi(-1{,}7) \approx 0{,}013$ et $\varphi(-1{,}6) \approx -0{,}05$, donc $-1{,}7 < \beta < -1{,}6$;
   $\varphi(-1{,}68) \approx 0{,}001$ et $\varphi(-1{,}67) \approx -0{,}005$, donc $-1{,}68 < \beta < -1{,}67$;
   Conclusion au centième près $\alpha \approx -1{,}68$.

En appliquant le théorème de la bijection sur $[0;+\infty[$:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi \text{ est continue sur } J = [0;+\infty[\text{ (elle est dérivable sur J) ;} \\ \bullet\ \varphi \text{ est strictement croissante sur I ;} \\ \bullet\ \varphi(0) = -1 \text{ ;} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty. \end{array}\right\}$

donc φ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$. Comme $0 \in [-1;+\infty[$ l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans J

Ainsi l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans J

$\varphi(0{,}76) \approx -0{,}03$ et $\varphi(0{,}77) \approx 0{,}006$
Ainsi $\varphi(0{,}76) < \varphi(\alpha) < \varphi(0{,}77)$, comme φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; on déduit : $0{,}76 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}77$

$\alpha \approx 0{,}77$

Partie D

1. Démontrer que le coefficient directeur de la droite (EF) est e^{α} (on utilisera le fait que $\varphi(\alpha) = 0$).
   On sait que E appartient à la droite (EF) et à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. $E(\alpha\ ;\ e^{\alpha})$ et $F(-\alpha\ ;\ 1-e^{\alpha})$. Le coefficient directeur de (EF) est $m_{(EF)} = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{1 - e^{\alpha} - e^{\alpha}}{-\alpha - \alpha} = \dfrac{1 - 2e^{\alpha}}{-2\alpha}$.
   On procède alors par équivalence.

$$\begin{aligned} m_{(EF)} = e^{\alpha} &\iff \frac{1-2e^{\alpha}}{-2\alpha} = e^{\alpha} \\ m_{(EF)} = e^{\alpha} &\iff 1 - 2e^{\alpha} = -2\alpha e^{\alpha} \\ m_{(EF)} = e^{\alpha} &\iff 2\alpha e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 1 = 0 \\ m_{(EF)} = e^{\alpha} &\iff 2(\alpha - 1)e^{\alpha} + 1 = 0 \\ m_{(EF)} = e^{\alpha} &\iff \varphi(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

   Or l'égalité $\varphi(\alpha) = 0$ est vraie et donc

   le coefficient directeur de la droite (EF) est e^{α}

2. L'équation de la tangente en E à la courbe $\mathcal{C}_f$ est :
   $y - e^{\alpha} = e^{\alpha}(x - \alpha)$.
   F appartient à cette tangente si et seulement si :
   $1 - e^{\alpha} - e^{\alpha} = e^{\alpha}(-\alpha - \alpha) \iff 1 - 2e^{-\alpha} = -2e^{\alpha} \iff 2(\alpha - 1)e^{\alpha} + 1 = 0$ ce qui a été démontré à la question 2. b. de la partie C.

   Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.

   Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $e^{-(-\alpha)} = e^{\alpha}$.
   On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^{α} et contient le point F.

   Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

Calcul intégral

Exercice 4

Commun à tous les candidats

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0\ ;\ 1]$ est intégrable sur cet intervalle et
   $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$.

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}.$$

2. On sait que sur $[0 ; 1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus du segment $[OA]$; l'intégrale de f sur $[0 ; 1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathcal{C})$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec $I(1 ; 0)$). Cette aire est égale à $\dfrac{OI \times IA}{2} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2e}}{2} = \dfrac{1}{4e}$.

$$\boxed{\text{Donc } \int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}.}$$

Partie B

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   $\boxed{\text{L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à } \mathcal{C} \text{ au voisinage de plus l'infini.}}$

2. g fonction polynôme est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   $\Delta = 4 - 12 = -8$, $\Delta < 0$; donc le trinôme a le signe de $a = 3$ sur $\mathbb{R}$.

   Conclusion $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. En appliquant le théorème de la bijection sur $[0 ; +\infty[$:
   - g est continue sur $I = [0 ; +\infty[$ (elle est dérivable sur I) ;
   - g est strictement croissante sur I ;
   - $g(0) = -1$;
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$.

   donc g réalise une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[-1;+\infty[$.

   $\boxed{\text{Comme } 0 \in [-1;+\infty[\text{ l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans I.}}$

3. *a)* f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = xe^{-x}$ et $v(x) = x^2+1$. De $u'(x) = e^{-x}(1-x)$, $v'(x) = 2x$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on en déduit que

   $$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - xe^{-x} \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

   $$f'(x) = \frac{e^{-x}\left[(1-x)\left(x^2+1\right) - 2x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$$

   $$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-x}\left[-x^3 - x^2 - x + 1\right]}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} \times g(x)}$$

   La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et pour tour réel x de $[0;+\infty[$, on a $(x^2+1)^2 >$
   $f'(x)$ a donc le signe de $-g(x)$.
   donc f' et g ont donc des signes contraires.

   b) On a vu que sur $[0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0 ; \alpha]$ et sur $]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4. *a)* Il est évident que quel que soit $x \in [0 ; +\infty[$, $(x-1)^2 \geqslant 0$

   $$(x-1)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + 1 - 2x \geqslant 0 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \ (1)$$

   $$(1) \iff \frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{x^2+1} \text{ En divisant par } x^2 + 1 > 0$$

$$(1) \iff \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2} \text{ En multipliant par } x \geq 0$$

b) On a pour tout $x \geqslant 0$; $-x \leqslant 0$
donc $e^{-x} \leqslant e^0$ (par croissance de la fonction exponentielle

ainsi $e^{-x} \leqslant 1$ d'où $\dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$ en multipliant par $\dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$

On a donc $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx = \int_n^{2n} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}\,dx \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx$. (d'après la question **4. a.**)

Or $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}\left[-e^{2n} + e^{-n}\right]$.

Conclusion $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.

c) Comme $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx = \int_n^{2n} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}\,dx$;

On a clairement pour tout $x \in [n;2n]$, $\dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} > 0$, et $n < 2n$, donc par positivité de l'intégrale, on déduit $u_n \geq 0$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$, on a par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right) = 0$

- ✐ on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$
- ✐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$
- ✐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right) = 0$

on en déduit par application du théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

ANNEXE

Exercice 4